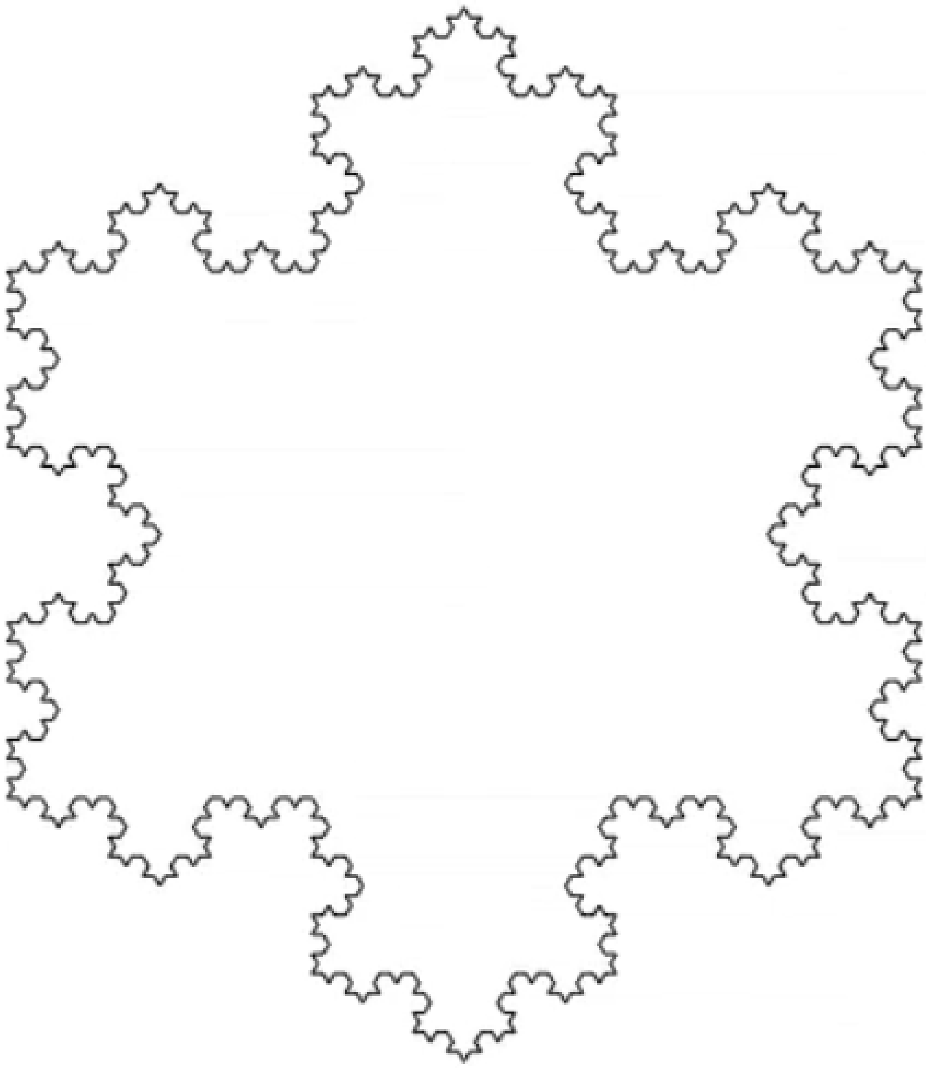
SOLUCIONARIO DE LA
DE LA OLIMPIADA COLIBRÍ

⋆ Prof. Álvaro Elizondo Montoya ⋆



⋆2020⋆

Índice general

Capítulo 1

OPERACIONES ARITMÉTICAS

1.1. EJERCICIOS

Soluciones en la página 9

1. ¿Cuántos dieciseisavos hay en $5{,}75$?

   a) 92

   b) 102

   c) 82

   d) 68

---

2. Si dividimos 1992 entre 1980 ¿Qué valor obtendremos como residuo?

   a) 10

   b) 12

   c) 14

   d) 16

---

3. Marianela multiplicó el número racional $\frac{3}{11}$ por otro número racional y obtuvo como producto 20. ¿Cuál fue ese otro número?

   a) $\frac{220}{3}$

   b) $\frac{3}{220}$

   c) $\frac{60}{11}$

   d) $\frac{11}{60}$

4. Silvia multiplicó cierto número por 5. El producto que ella obtuvo, Felipe lo dividió entre 6, el resultado que Felipe obtuvo fue $\frac{3}{8}$. Entonces, ¿cuál es el número que Silvia multiplicó por 5?

   a) $\frac{18}{5}$
   b) $\frac{5}{18}$
   c) $\frac{20}{9}$
   d) $\frac{9}{20}$

---

5. ¿Cuál es el cuadrado de la tercera parte de $\frac{5}{6}$?

   a) $\frac{25}{344}$
   b) $\frac{25}{18}$
   c) $\frac{25}{324}$
   d) $\frac{10}{36}$

---

6. Rebeca estudió los decimales correspondientes a la fracción $\dfrac{6}{7}$. ¿Cuál es el dígito que Rebeca encontró en el 100^o. lugar decimal?

   a) 8
   b) 5
   c) 0
   d) 1

---

7. ¿Cuál es la suma de los siguientes números racionales?

$$1\tfrac{2}{5},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3} \text{ y } 2\tfrac{2}{6}$$

   a) $\frac{118}{20}$
   b) $\frac{125}{25}$
   c) $\frac{137}{30}$
   d) $\frac{147}{36}$

8. Graciela dividió el producto de 803 por 907, entre la suma de 63 y 37. ¿Cuál es el residuo de esa división?

   a) 7

   b) 0

   c) 21

   d) 12

---

9. Si dividimos 40 entre un medio y al resultado le sumamos 4, obtendremos

   a) 48

   b) $24,4$

   c) 84

   d) $8,80$

---

10. La suma del doble de $\frac{2}{3}$ y el triple de $\frac{3}{4}$, se encuentra en la opción

    a) $\frac{6}{43}$

    b) $\frac{43}{12}$

    c) $\frac{7}{3}$

    d) $\frac{15}{4}$

---

11. ¿Cuál es el resultado de $2019 \times 2019 \div 2019 - 2019$?

    a) 2019

    b) 4038

    c) 0

    d) 1

12. ¿Cuál es el número que es igual al triple del cuadrado del resultado de la operación $124 - 47 + 1$?

    a) 54756

    b) 18252

    c) 6087

    d) 468

---

13. Isabel calculó correctamente el promedio de los siguientes diámetros de tornillos $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{16}$ y $\frac{1}{32}$. ¿Cuál es el promedio obtenido por Isabel?

    a) $\frac{27}{32}$

    b) $\frac{32}{27}$

    c) $\frac{27}{128}$

    d) $\frac{161}{576}$

1.2. SOLUCIONES

1. Resolvamos de dos formas diferentes:

Método 1. Basta realizar la operación $5{,}75$ entre $\frac{1}{16}$ para determinar cuántos dieciseisavos hay en $5{,}75$:

1) Primero conviertamos $5{,}75$ a fracción:
$$5{,}75 = \frac{575}{100} = \frac{115}{20} = \frac{23}{4}$$
2) Luego se debe calcular el resultado de $\frac{23}{4} \div \frac{1}{16}$:
$$\frac{23}{4} \div \frac{1}{16} = \frac{23 \cdot 16}{4} = \frac{23 \cdot 4}{1} = 92$$

Método 2. Procedamos así:

1) Primero conviertamos $5{,}75$ a fracción:
$$5{,}75 = \frac{575}{100} = \frac{115}{20} = \frac{23}{4}$$
2) Luego amplificamos la fracción hasta obtener 16 en el denominador, es decir, multiplicamos por 4 el numerador y el denominador así:
$$\frac{23}{4} = \frac{23 \cdot 4}{4 \cdot 4} = \frac{92}{16} = 92 \cdot \frac{1}{16}$$
Luego se requieren 92 dieciseisavos para tener $5{,}75$

---

2. Se realiza la división:

$$\begin{array}{r|l} 1992 & 1980 \\ \cline{2-2} 12 & 1 \end{array}$$

Se observa que el residuo es: 12

---

3. Resolvamos mediante dos métodos diferentes:

Método 1. Solo se necesita resolver la siguiente operación
$$20 \div \frac{3}{11} = \frac{220}{3}$$

Método 2. Para los estudiantes que saben resolver ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{3}{11}\cdot x &= 20\\ 3x &= 20\cdot 11\\ 3x &= 220\\ x &= \frac{220}{3}\end{aligned}$$

---

4. Podemos resolver así:

Método 1. Este tipo de ejercicios se hacen realizando las operaciones en orden inverso al que se mencionan, de esta forma:

1) Multiplicamos $\frac{3}{8}$ por 6, esto es $\frac{18}{8}$ o bien $\frac{9}{4}$

2) Luego se debe dividir $\frac{9}{4}$ entre 5, para obtener $\frac{9}{20}$

Método 2. Otra forma, es plantear una única operación, así:

$$\frac{3}{8}\cdot 6\div 5=\frac{3\cdot 6}{8}\div 5=\frac{18}{8}\div 5=\frac{9}{4}\div 5=\frac{9}{20}$$

---

5. Resolvamos de dos formas:

Método 1. Este tipo de ejercicios se hacen realizando las operaciones en orden inverso al que se mencionan, de esta forma:

1) Dividimos $\frac{5}{6}$ entre 3:

$$\frac{5}{6}\div 3=\frac{5}{18}$$

2) Luego se debe calcular el cuadrado de $\frac{5}{18}$:

$$\left(\frac{5}{18}\right)^2=\frac{5}{18}\cdot\frac{5}{18}=\frac{25}{324}$$

Método 2. Otra forma, es plantear una única operación, así:

$$\left(\frac{5}{6}\div 3\right)^2=\left(\frac{5}{18}\right)^2=\frac{5}{18}\cdot\frac{5}{18}=\frac{25}{324}$$

6. Primero realicemos la división y observemos su cociente.

$$\begin{array}{r|l} 6 & 7 \\ \cline{2-2} 60 & 0.857142 \\ 40 & \\ 50 & \\ 10 & \\ 30 & \\ 20 & \\ 6 & \end{array}$$

Se observa que el resultado es: $0.\overline{857142}$, realizando el cociente 100 entre 6 nos percatamos que si se repite el ciclo 16 veces pues, aún quedan 4 decimales más para llegar al centésimo decimal, luego el dígito debe ser un 1.

$$\begin{array}{r|l} 100 & 6 \\ \cline{2-2} 40 & 16 \\ 4 & \end{array}$$

---

7. Veamos: $1\frac{2}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+2\frac{2}{6}=\frac{7}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{7}{3}=\frac{7}{5}+\frac{1}{2}+\frac{8}{3}=\frac{42+15+80}{30}=\frac{137}{30}$

---

8. Graciela calculó: $\dfrac{803\cdot 907}{63+37}=\dfrac{728321}{100}$

$$\begin{array}{r|l} 728321 & 100 \\ \cline{2-2} 283 & 7283 \\ 832 & \\ 321 & \\ 21 & \end{array}$$

Nótese que efectuando la operación obtenemos residuo 21, que son justamente los últimos dos dígitos de la cantidad 728321. ¿Será siempre así cuando se divide entre 100?

9. Resolvamos de dos formas diferentes:

Método 1 Sabemos que en cada unidad hay dos medios, luego en 40 unidades hay 80 medios, así que la división 40 entre un medio es 80, si le sumamos 4 obtenemos 84.

Método 2 Basta resolver:

$$40 \div \frac{1}{2} + 4 = \frac{80}{1} + 4 = 80 + 4 = 84$$

---

10. Resolvamos de dos formas diferentes:

Método 1 En este método se usa la amplificación de fracciones para homogenizarlas y realizar posteriormente la suma de fracciones homogéneas. Empecemos así, el doble de $\frac{2}{3}$ es $\frac{4}{3}$ y el triple de $\frac{3}{4}$ es $\frac{9}{4}$, basta realizar la suma:

$$\frac{4}{3} + \frac{9}{4} = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{4} + \frac{9}{4} \cdot \frac{3}{3} = \frac{16}{12} + \frac{27}{12} = \frac{43}{12}$$

Método 2 Esta segunda solución hace uso del mínimo común múltiplo de los denominadores. El mínimo común múltiplo de 3 y 4 es 12, luego:

$$\frac{4}{3} + \frac{9}{4} = \frac{4 \cdot 4 + 3 \cdot 9}{12} = \frac{16 + 27}{12} = \frac{43}{12}$$

---

11. Realicemos un razonamiento inductivo para determinar la respuesta, analicemos casos con valores más pequeños, así:

n	Expresión	Valor
1	$1 \times 1 \div 1 - 1$	0
2	$2 \times 2 \div 2 - 2$	0
3	$3 \times 3 \div 3 - 3$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2019	$2019 \times 2019 \div 2019 - 2019$	0

Dado el comportamiento de los primeros valores, podemos presumir que el valor será también 0.

Reflexionando un poco más sobre el ejercicio, nos percatamos que multiplicar por un número y dividir por el mismo número, es aplicar operaciones inversas, por ello su "efecto" se anula. Es así que si se toma el número 2019, se multiplica por 2019 y luego se divide entre 2019, esto da 2019, posteriormente, si a este resultado se le resta 2019, la resta resultará ser cero.

---

12. Primero determinenos el número: $124 - 47 + 1 = 78$
Luego, el cuadrado del número se obtiene calculando 78^2:

$$\begin{array}{rrrr} & & 7 & 8 \\ & \times & 7 & 8 \\ \hline & 6 & 2 & 4 \\ + \; 5 & 4 & 6 & \\ \hline 6 & 0 & 8 & 4 \end{array}$$

Finalmente, debemos calcular el triple de 6084, así:

$$\begin{array}{rrrrr} & 6 & 0 & 8 & 4 \\ & \times & & & 3 \\ \hline 1 & 8 & 2 & 5 & 2 \end{array}$$

---

13. Isabel observa los denominadores y nota que 32 es divisible entre 2, 4 y 16, pero no entre 3, luego el mínimo común denominador de las fracciones dadas debe ser 32×3, es decir 96. Calcula ahora el promedio de la siguiente forma:

$$p = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}}{6}$$

Idea entonces amplificar la fracción multiplicando tanto el numerador como el denominador por 96, así:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\right) \cdot 96}{6 \cdot 96} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot 96 + \frac{1}{3} \cdot 96 + \frac{1}{4} \cdot 96 + \frac{1}{2} \cdot 96 + \frac{1}{16} \cdot 96 + \frac{1}{32} \cdot 96}{6 \cdot 96} \\ &= \frac{48 + 32 + 24 + 48 + 6 + 3}{6 \cdot 96} \\ &= \frac{161}{576} \end{aligned}$$

Capítulo 2

PROBLEMAS DE COMPARACIÓN O RELACIONES

Soluciones en la página 19

2.1. EJERCICIOS

1. ¿Cuál de los siguientes números racionales es el menor?

   $\dfrac{41}{58}$ $\qquad$ $\dfrac{25}{30}$ $\qquad$ $\dfrac{41}{42}$ $\qquad$ $\dfrac{31}{24}$

---

2. ¿Cuál de los siguientes números racionales es el mayor?

   $\dfrac{25}{30}$ $\qquad$ $\dfrac{31}{24}$ $\qquad$ $\dfrac{41}{58}$ $\qquad$ $\dfrac{41}{42}$

---

3. Un libro cuesta un dólar más un número entero de centavos. El costo total de seis ejemplares de ese cuaderno, es menos de $\$8,00$. Sin embargo, el costo total de siete ejemplares del mismo libro es mayor que $\$8,00$. ¿Cuál es el menor precio que un ejemplar de este libro puede costar?

   a) $\$1,10$

   b) $\$1,15$

   c) $\$1,32$

   d) $\$1,50$

4. En el tanque amarillo hay doble de litros de vino rojo que en el tanque azul. Si se eliminan 8 litros de vino de cada uno de estos dos tanques, uno de los tanques tendrá tres veces más litros de vino que el otro. ¿Cuántos litros de vino contenía el tanque de menos litros de vino antes de que le sacaran 8 litros de vino?

    a) 16
    b) 8
    c) 12
    d) 3

---

5. Una caja de tachuelas pesa 120g cuando está llena y 70g cuando está llena hasta la mitad. ¿Cuántos gramos pesa esta caja cuando está vacía?

    a) 15
    b) 18
    c) 24
    d) 20

---

6. ¿Cuál es la suma del mayor número entero menor que 113 y el menor número entero mayor que 113?

    a) 236
    b) 218
    c) 224
    d) 226

---

7. ¿Cuál de estos números está entre $4\,326$ y $4\,358$?

    a) $4\,400$
    b) $4\,300$
    c) $4\,345$
    d) $4\,450$

8. Un balde contenía agua hasta la mitad. Un conserje añade 2 litros de agua más y entonces el balde llega a tres cuartos de su capacidad. ¿Cuál es la capacidad total del balde?

   a) 8 litros

   b) 6 litros

   c) 4 litros

   d) 10 litros

---

9. Elías tenía 168 carros de colección. Vendió la mitad de ellos a Ricardo y las tres cuartas partes del resto a Camila. ¿Cuántos carros compró Camila y cuántos le quedaron a Elías?

   a) 42 y 42.

   b) 17 y 67.

   c) 63 y 21.

   d) 25 y 59.

---

10. Un edificio de $50\,m$ de alto proyecta una sombra de $10\,m$. Si al mismo tiempo el edificio de al lado proyecta una sombra de $6,2\,m$, entonces, ¿cuál es la altura de este segundo edificio?

    a) $28\,m$

    b) $33\,m$

    c) $35\,m$

    d) $31\,m$

---

11. ¿Cuál de estos números está comprendido entre $0,203$ y $0,204$?

    a) 0,2031

    b) 0,2050

    c) 0,1990

    d) 0,2000

12. En un estacionamiento de la Ciudad de Cartago cobran ₡1200 por la primera hora y ₡500 por cada hora adicional o fracción de hora. ¿Cuánto tendrá que pagar Sandra por estacionar el auto por $5,5$ horas en dicho estacionamiento?

    a) ₡2700

    b) ₡3250

    c) ₡1700

    d) ₡3700

2.2. SOLUCIONES

1. *a*) Nótese que $\frac{31}{24}$ es una fracción impropia, luego su valor es mayor que 1, las restantes fracciones son propias y su valor está entre 0 y 1. Con esta pequeña observación se descarta la última de las fracciones.

   b) La fracción $\frac{41}{42}$ casi vale 1 pues 41 y 42 son cantidades muy cercanas. Luego la menor de las fracciones debe ser alguna de las dos primeras.

   c) Realicemos las siguientes divisiones:

$$\begin{array}{r|l} 41 & \underline{58} \\ 410 & 0.706 \\ 400 & \\ 52 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 25 & \underline{30} \\ 250 & 0.83 \\ 100 & \\ 10 & \end{array}$$

   Es claro que la fracción de menor valor es $\frac{41}{58}$

---

2. De las fracciones dadas, solo $\frac{31}{24}$ es una fracción impropia, las restantes son fracciones propias. Luego la de mayor valor debe ser $\frac{31}{24}$.
   Recuerde que:

   a) Una fracción es propia si su numerador es menor que el denominador.

   b) Una fracción es impropia si su numerador es mayor que el denominador.

   c) El valor de las fracciones impropias siempre es mayor que 1.

   d) El valor de las fracciones propias siempre está entre 0 y 1.

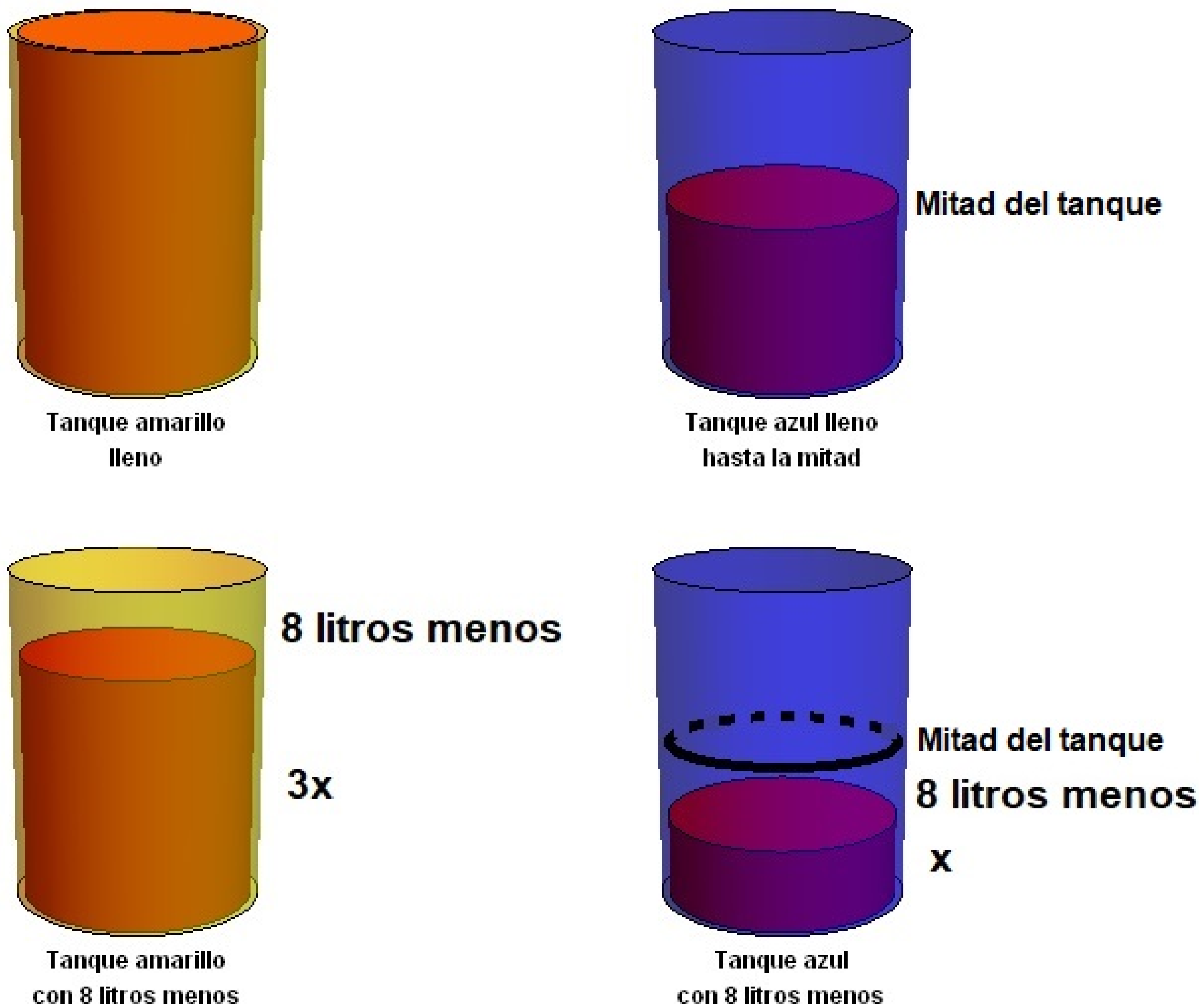
---

3. Realicemos las siguientes divisiones:

$$\begin{array}{r|l} 8 & \underline{6} \\ 20 & 1.333 \\ 20 & \\ 20 & \\ 2 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 8 & \underline{7} \\ 10 & 1.142 \\ 30 & \\ 20 & \\ 6 & \end{array}$$

   Luego el precio debe estar entre $1{,}142$ y $1{,}333$, así el menor precio que cumple es $\$1{,}15$

4. Considere las imágenes de los tanques:



   Se visualiza entonces que medio tanque equivale a $2x$ y por ende $x = 8$, es así que el tanque que contenía menos vino, contenía 16 litros.

---

5. La diferencia entre los pesos dados corresponde al peso de la mitad de las tachuelas que caben en la caja, es decir $120g - 70g = 50g$, luego las tachuelas que llenan la caja pesan $100g$, por ello la caja ha de pesar solo $20g$.

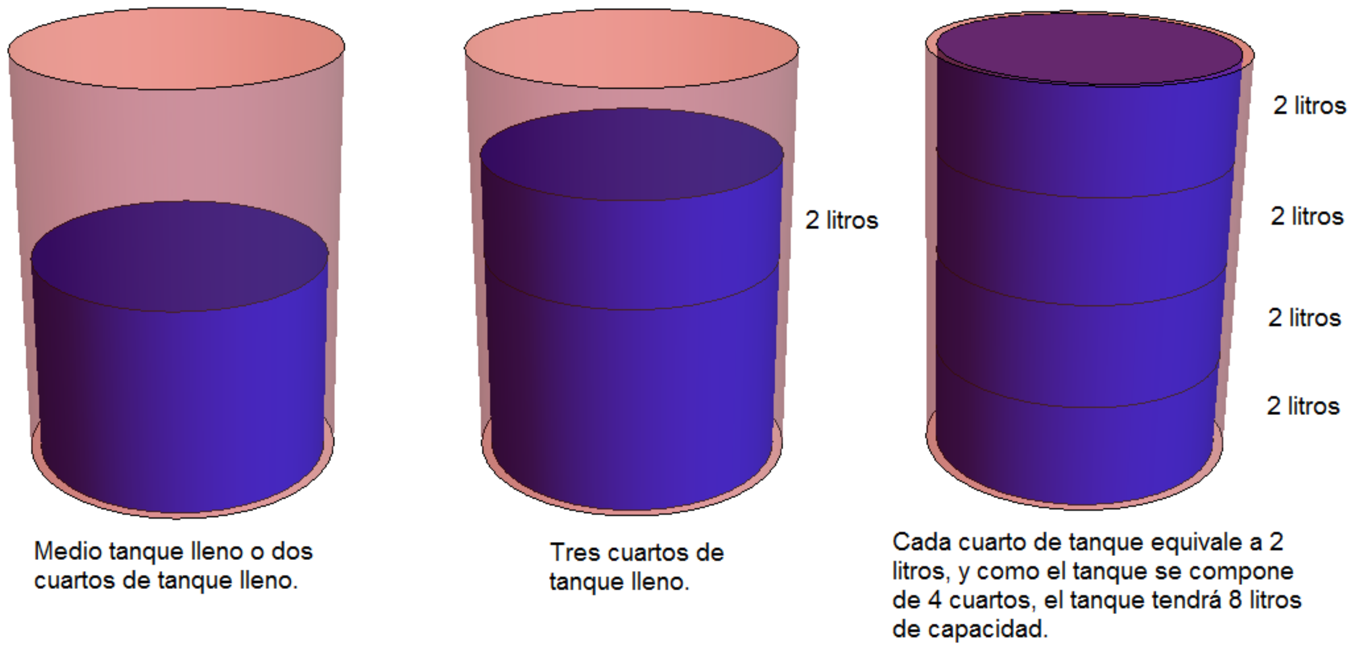
---

6. Estos números son 112 y 114, luego su suma es 226.

7. Dado que las cantidades dadas coinciden en las centenas y en las unidades de millar, basta buscar un número que tenga las mismas centenas y unidades de millar. Hecho este análisis, ahora saber cuál es el número que está entre ellos queda determinado por la comparación entre las unidades y las decenas. Este análisis descarta las opciones a) y d) y como $26 < 45 < 58$, luego la respuesta solo puede corresponder a la opción c)

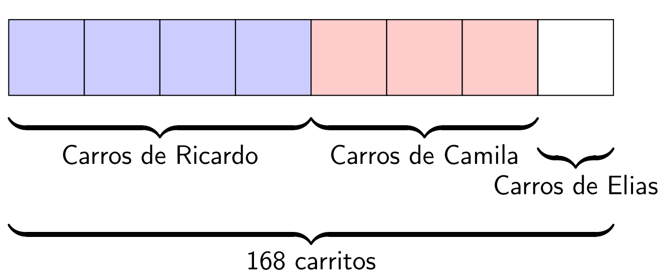
---

8. Considere las siguientes representaciones:



---

9. Representemos la cantidad total de carritos como una barra dividida en 8 partes.



A Ricardo le corresponden 4 cuadritos de los 8, pues a el le tocan la mitad, quedan 4 cuadritos, como a Camila le corresponden las tres cuartas partes del resto, le tocaran 3 de los cuatro cuadritos restantes, mientras que a Elias le corresponde el último cuadrito.

Cada cuadrito de la representación vale $168 \div 8$, es decir, valen 21. Por lo tanto Camila compró 3×21 carritos, o sea 63 carritos y a Elías le quedaron 21 carritos.

---

10. Dado que el primer edificio mide $50\,m$ y proyecta una sombra de $10\,m$, se deduce que por cada metro de sombra se tienen $5\,m$ de altura en el edificio. Un segundo edificio que proyecta una sombra de $6,2\,m$, debería tener una altura de $6,2$ veces $5\,m$, es decir $31\,m$.

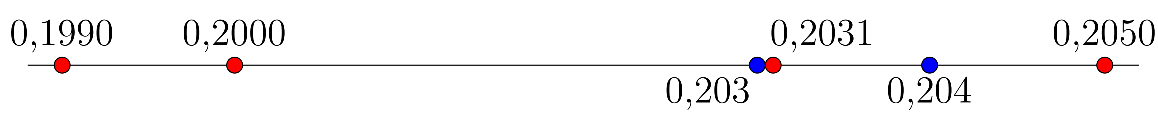
---

11. Note que todas las opciones corresponden a cantidades de 4 decimales. Los números (con 4 decimales) que se hallan entre $0,203$ y $0,204$ son:

$$\begin{array}{lll} 0,2031 & 0,2034 & 0,2037 \\ 0,2032 & 0,2035 & 0,2038 \\ 0,2033 & 0,2036 & 0,2039 \end{array}$$

Se observa que de las opciones propuestas, la cifra $0{,}2031$ se halla entre $0,203$ y $0,204$.

Gráficamente, los puntos se ubican en la recta numérica como sigue:



---

12. La cobro se realiza así:

$$\begin{array}{rcl} \text{Primera hora} & \to & ¢1200 \\ \text{Segunda hora} & \to & ¢500 \\ \text{Tercera hora} & \to & ¢500 \\ \text{Cuarta hora} & \to & ¢500 \\ \text{Quinta hora} & \to & ¢500 \\ \text{Última media hora} & \to & ¢500 \\ \hline \text{Total} & \to & ¢3700 \end{array}.$$

Capítulo 3

PROBLEMAS DE EDADES

Soluciones en la página 24

3.1. EJERCICIOS

1. Ana tiene una hermanita de 4 años de edad. ¿Cuál es el doble del cuadrado de la mitad de la edad de la hermanita de Ana?

    a) 4

    b) 6

    c) 8

    d) 16

---

2. Hoy es el cumpleaños de Carla, Carmen y Camila. La suma de las edades es 44. ¿Cuál será la suma de sus edades la próxima vez que dicha suma sea un número de dos dígitos iguales?

    a) 77

    b) 55

    c) 88

    d) 99

3.2. SOLUCIONES

1. Podemos resolver mediante dos métodos:

Método 1. Este tipo de ejercicios se hacen realizando las operaciones en orden inverso al que se mencionan, de esta forma:

1) Calculamos la mitad de la edad de la hermanita de Ana, es decir $4 \div 2$, o sea 2.
2) Calculamos ahora el cuadrado de 2, es decir 2^2, lo que nos da: 4.
3) Ahora lo primero que se menciona, es decir, el doble de lo que hemos obtenido en el paso anterior: $2 \cdot 4$, así, la respuesta es 8

Método 2. Calculemos de esta forma:

$$\underbrace{\text{el doble del}\,\underbrace{\text{cuadrado de }\underbrace{\text{la mitad de la edad}}_{2}}_{2^2=4}}_{2\cdot 4=8}$$

---

2. Resolvamos de dos maneras diferentes:

Método 1 Siempre que una cantidad está formada dos dígitos, esta es siempre divisible entre 11, luego como el mínimo común múltiplo entre 11 y 3 es 33, entonces la primera vez que repite la condición deseada será cuando la suma de las cantidades sea $44 + 33$, es decir 77 años.

Método 2 Para resolver este ejercicio es importante notar que cada año que pasa, la suma de las edades se incrementa en 3 años, luego las posibles sumas son:

$$44, 47, 50, 53, 56, 59, 62, 65, 68, 71, 74, \boxed{77}, \ldots$$

Así, la próxima vez que dicha suma sea un número de dos dígitos iguales es cuando sumen 77 años.

Capítulo 4

PROBLEMAS DEL SOMA

Soluciones en la página 31

4.1. EJERCICIOS

1. Laura y Alejandro construyeron varios cuerpos sólidos distintos usando solamente las piezas 1 y 2 del soma de Piet Hein. ¿Cuál es el área del sólido de menor área que pudieron construir?

   a) $25\,u^2$

   b) $20\,u^2$

   c) $26\,u^2$

   d) $24\,u^2$

---

2. ¿Cuál es el producto del número de vértices por el número de aristas por el número de caras de la pieza "cuatro" del soma de Piet Hein?

   a) 3660

   b) 3640

   c) 3820

   d) 3840

3. Ericka comparó las piezas 1,2,5 y 6 del soma de Piet Hein, ¿Cuál de estas cuatro piezas es la que tiene el área menor?

   a) 1
   b) 2
   c) 5
   d) 6

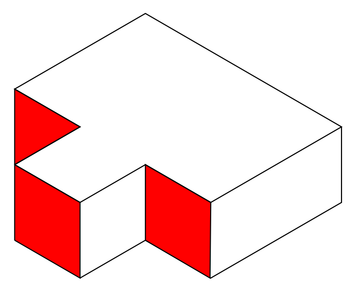
---

4. ¿Cuántas piezas del soma tienen un volumen de $4\,u^3$?

   a) 7
   b) 6
   c) 5
   d) ninguna

---

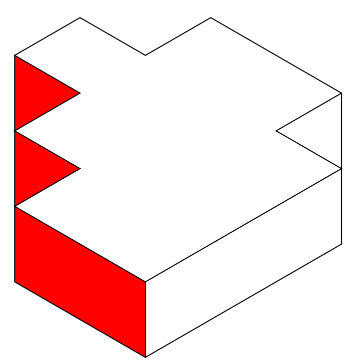
5. Con las piezas uno y cuatro de su soma, forme este cuerpo sólido. ¿Cuál es el área total de este cuerpo?



   a) $24\,u^2$
   b) $26\,u^2$
   c) $27\,u^2$
   d) $30\,u^2$

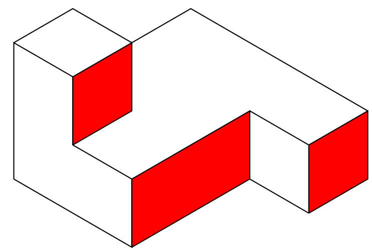
---

6. ¿Cuál de las siguientes piezas del soma no puede formar parte de este sólido?



   a) siete
   b) uno
   c) tres
   d) dos

7. Forme usted este sólido con las piezas 2 y 6. ¿Cuál es el número mayor en el "mapa" de este cuerpo?



   a) -1

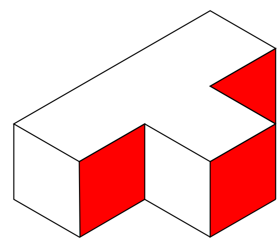
   b) 0

   c) 1

   d) 2

---

8. ¿Cuál es el área total de esta pieza del soma?



   a) $19\,u^2$

   b) $17\,u^2$

   c) $18\,u^2$

   d) $16\,u^2$

---

9. ¿Cuál es el producto del número de vértices por el número de aristas por el número de caras de la pieza "tres" del soma de Piet Hein?

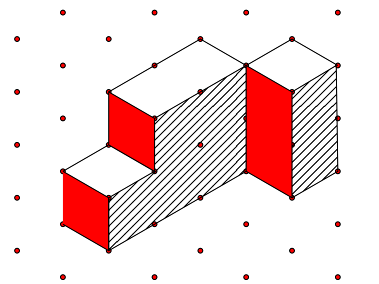
   a) 5230

   b) 2840

   c) 3840

   d) 4520

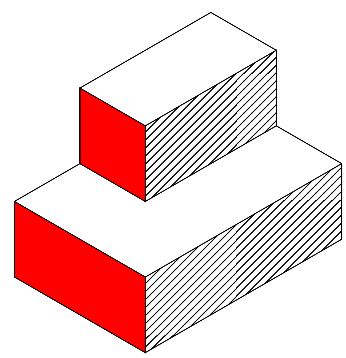
10. Ana Laura construyó este cuerpo tridimensional con las piezas "cuatro" y "seis" del soma. ¿Cuál es el área total de este cuerpo?



   a) $28\,u^2$
   b) $31\,u^2$
   c) $32\,u^2$
   d) $33\,u^2$

---

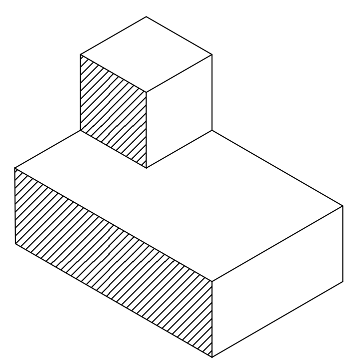
11. Con las piezas "cinco" y "seis" del Soma de Piet Hein se construyó el cuerpo sólido del cual se muestra aquí una vista. ¿Cuál es el área total de este cuerpo sólido?



   a) $26\,u^2$
   b) $22\,u^2$
   c) $28\,u^2$
   d) $24\,u^2$

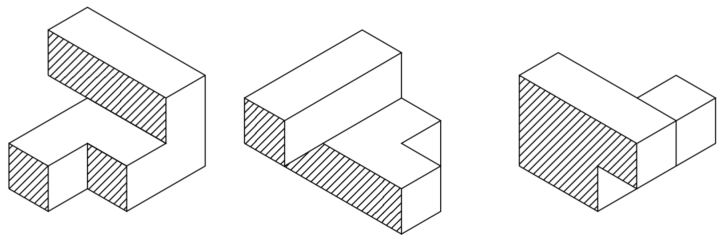
---

12. Clara construyó este cuerpo sólido con dos de las piezas del Soma de Piet Hein. Una de ellas es la pieza "uno". ¿Cuál es la otra pieza?



   a) Tres
   b) Cuatro
   c) Cinco
   d) Dos

13. Laura y Jorge construyeron un cuerpo sólido con las piezas "dos" y "tres" del Soma de Piet Hein. Aquí se muestran tres vistas distintas de este sólido.

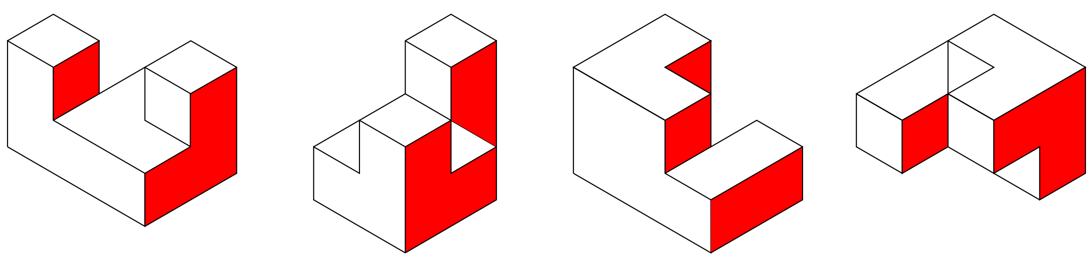


¿Cuántos vértices tiene el cuerpo sólido construido por Jorge y Laura?

a) 14 *b*) 18 *c*) 19 *d*) 20

---

14. En la siguiente figura.



Se presentan cuatro vistas isométricas distintas de un mismo sólido. Este fue construido con las piezas uno y siete del soma. Constrúyalo usted usando su propio soma. El área total de este sólido es

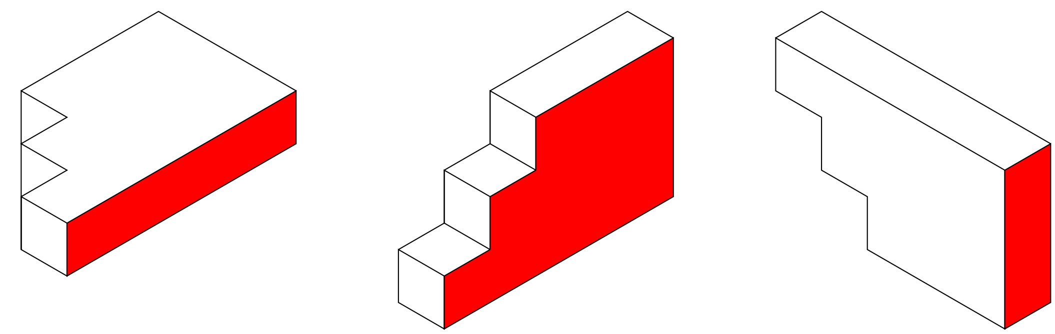
a) $28\,u^2$

b) $19\,u^2$

c) $29\,u^2$

d) $30\,u^2$

15. Este es un cuerpo tridimensional construido con tres de las piezas del soma.



Ninguna de esas tres piezas puede ser la número

a) dos

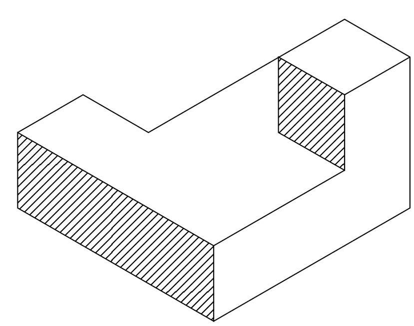
b) tres

c) cuatro

d) cinco

---

16. Flora y María construyeron un cuerpo sólido con dos de las piezas del soma una de ellas es la número tres.
¿Cuál es la otra pieza que compone el cuerpo sólido construido por Flora y María?



a) siete.

b) cinco.

c) seis.

d) cuatro.

4.2. SOLUCIONES

1. Resolvamos de dos formas:

   a) Tomemos en cuenta la siguiente información:

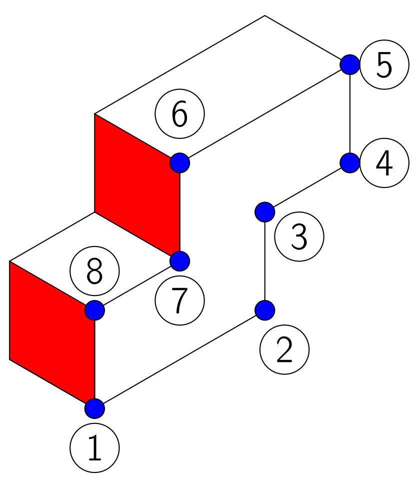
Pieza número	Área total
1	14
2	18
3	18
4	18
5	18
6	18
7	18

   Es decir, todas las piezas tienen área 18, excepto la pieza 1 que tiene área 14.

   b) Cuando se adosan las piezas 1 y 2, para que la figura resultante tenga área mínima, estas deben ser adosadas por regiones de área 3, luego el área mínima de la figura sólida con las piezas ya adosadas es: $14+18-3-3 = 26\,u^2$

2. El número de aristas siempre es superior al número de caras o vértices, de hecho, el número de caras más el número de vértices menos 2 es igual al número de aristas, por esto es que solo contamos vértices y caras y calculamos las aristas así: $\boxed{\text{Aristas} = \text{Caras} + \text{Vertices} - 2}$

   a) De la figura, se observa que se cuentan 8 vértices en la cara frontal, consecuentemente, habrán 8 vértices más en la cara posterior, esto nos da un total de 16 vértices.



b) Las caras se pueden contar así:

Vista	Número de caras
Vista frontal	1
Vista posterior	1
Vista lateral izquierda	2
Vista lateral derecha	2
Vista inferior	2
Vista superior	2
Total	10

c) El número de aristas se puede calcular así:

$$A = C + V - 2 = 10 + 16 - 2 = 24$$

d) Luego el producto solicitado es:

$$P = 10 \cdot 16 \cdot 24 = 3840$$

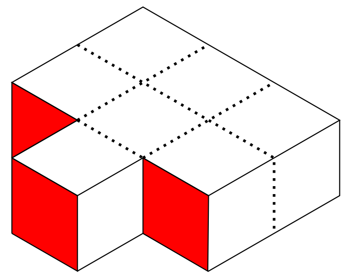
3. Considere la información:

Pieza número	Área total
$\boxed{1}$	$\boxed{14}$
$\boxed{2}$	$\boxed{18}$
3	18
4	18
$\boxed{5}$	$\boxed{18}$
$\boxed{6}$	$\boxed{18}$
7	18

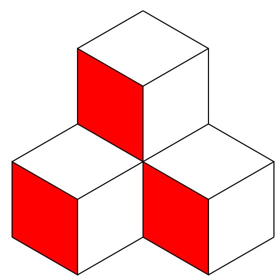
Es claro que la pieza de menor área es la pieza 1.

4. Todas las piezas del soma tienen volumen $4\,u^3$ excepto una, la pieza uno que tiene volumen $3\,u^3$, luego la respuesta es 6 pues el soma tiene 7 piezas.

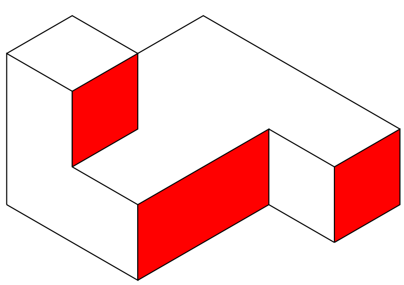
5. Si mentalmente hacemos la siguiente separación como en la figura, nos percatamos que el área es: $A = 7 + 7 + 3 + 3 + 3 + 3 = 14 + 12 = 26\,u^2$

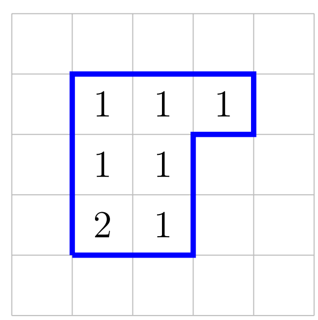


6. Es claro que de las figuras mencionadas, la figura 7 no podría ser parte del sólido pues la figura 7 tiene la forma:

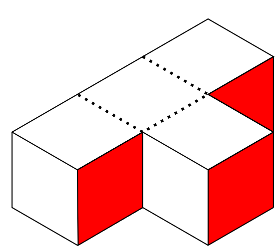


7. El mapa de la figura queda como se muestra, luego el mayor valor en el mapa es 2.



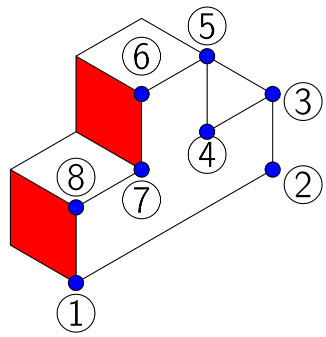


8. Divídase mentalmente la figura tal como se muestra:



Resulta claro que el área es: $A = 3 + 2 + 3 + 2 + 4 + 4 = 18\,u^2$

9. El número de aristas siempre es superior al número de caras o vértices, de hecho, el número de caras más el número de vértices menos 2 es igual al número de aristas, por esto es que solo contamos vértices y caras y calculamos las aristas así: $Aristas = Caras + V\acute{e}rtices - 2$
De la figura, se observa que se cuentan 8 vertices en la cara frontal, consecuentemente, habrán 8 vértices más en la cara posterior, esto nos da un total de 16 vértices.



Las caras se pueden contar así:

Vista	Número de caras
Vista frontal	1
Vista posterior	1
Vista lateral izquierda	2
Vista lateral derecha	2
Vista inferior	1
Vista superior	3
Total	10

El número de aristas se puede calcular así:

$$A = C + V - 2 = 10 + 16 - 2 = 24$$

Luego el producto solicitado es:

$$P = 10 \cdot 16 \cdot 24 = 3840$$

10. Método 1.

$\boxed{1}$ Tomemos en cuenta la siguiente información:

Pieza número	Área total
1	14
2	18
3	18
4	18
5	18
6	18
7	18

Es decir, todas las piezas tienen área 18, excepto la pieza 1 que tiene área 14.

$\boxed{2}$ Cuando se adosan las piezas 4 y 6, estas quedan adosadas por regiones de área 2, luego el área total de la figura sólida con las piezas ya adosadas es: $18 + 18 - 2 - 2 = 32\,u^2$

Método 2.

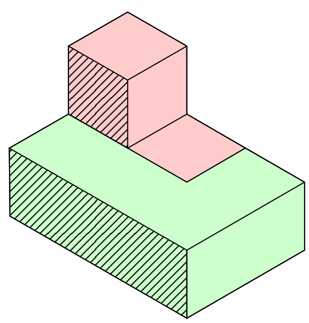
Las áreas también se pueden calcular así:

Vista	Áreas
Vista frontal	7
Vista posterior	7
Vista lateral izquierda	4
Vista lateral derecha	4
Vista inferior	5
Vista superior	5
Total	32

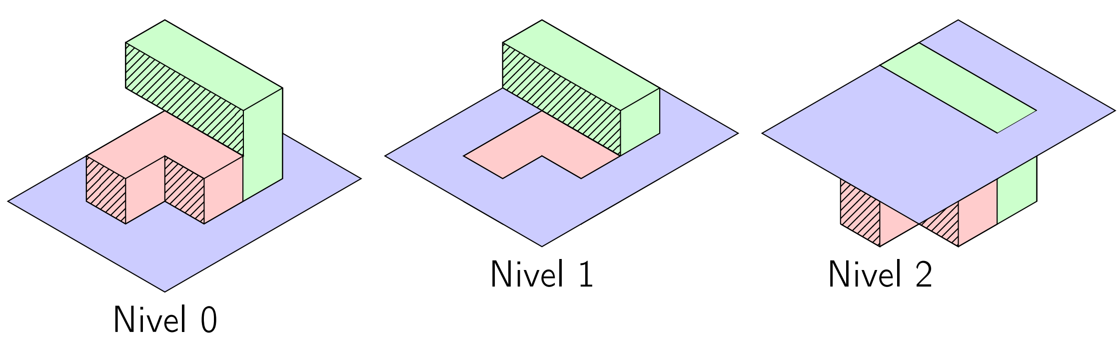
11. Para determinar el área total, se hará mediante un conteo de áreas de cada una de las vistas.

Vista	Área
Vista frontal	5
Vista lateral derecha	3
Vista lateral izquierda	3
Vista posterior	5
Vista superior	6
Vista inferior	6
Total	28

12. En la siguiente figura, se destaca con color rosa la pieza "uno" y con color verde claro la pieza "dos".



13. En la siguiente figura, se destaca con color rosa la pieza "tres" y con color verde claro la pieza "dos". Para realizar el conteo, considérese planos de nivel y contemos cuántos vértices hay en cada plano.



Plano de nivel	Cantidad de vértices
0	6
1	9
2	4
Total	19

14. Tomemos en cuenta la siguiente información:

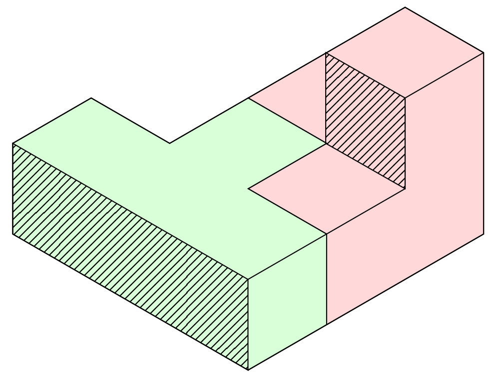
Pieza número	Área total
1	14
2	18
3	18
4	18
5	18
6	18
7	18

Es decir, todas las piezas tienen área 18, excepto la pieza 1 que tiene área 14. La suma del área de las piezas 1 y 7, es $14 + 18$, pero se deduce del sólido dado que estas se adosan por regiones de área 2, así el área resultante al juntar las piezas seriá: $14 + 18 - 2 - 2 = 28\, u^2$

15. Al ser el cuerpo "plano", solo puede ser construido con piezas "planas", estas piezas planas son las piezas prismáticas del soma de Piet Hein, las que numeramos como las piezas 1, 2, 3 y 4. Luego, no podrían utilizarse las piezas 5, 6 o 7.

Nota: Es fácil verificar que el sólido se puede construir empleando las piezas 2, 3 y 4.

16. Probando piezas del soma, se concluye que la otra pieza con la que se compone el sólido es la pieza siete.



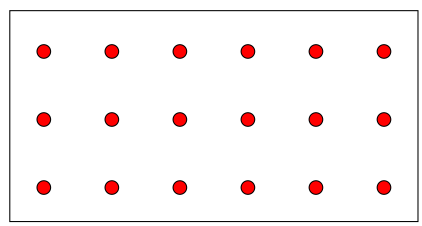
Capítulo 5

PROBLEMAS DEL GEOPLANO

Soluciones en la página 43

5.1. EJERCICIOS

1. Este es el geoplano de Héctor que tiene solamente 18 clavos. ¿Cuántos cuadrados de áreas distintas puede Héctor construir en su geoplano?



   a) uno

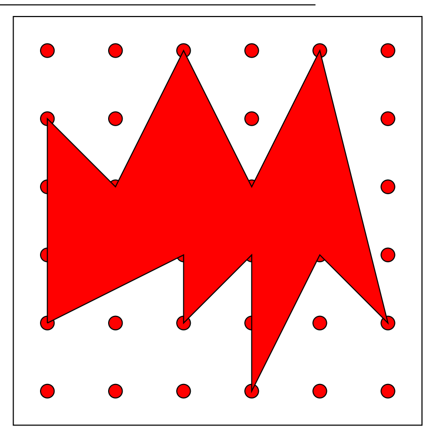
   b) dos

   c) tres

   d) más de tres

---

2. ¿Cuál es el área de la superficie pintada de rojo?



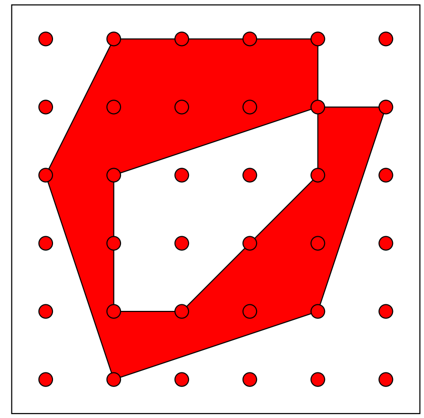
   a) $15\,u^2$

   b) $10{,}5\,u^2$

   c) $13{,}5\,u^2$

   d) $11{,}5\,u^2$

3. Copie esta figura en su geoplano. ¿Cuál es el área de la región destacada de esta figura?



   a) $11{,}5\,u^2$

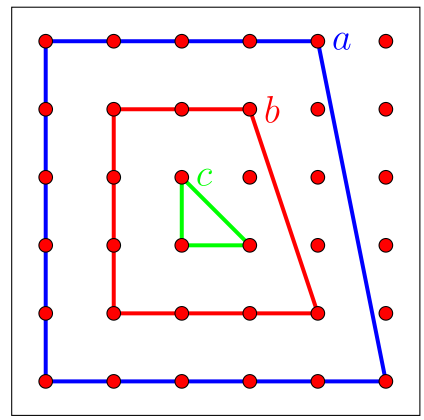
   b) $12{,}5\,u^2$

   c) $12\,u^2$

   d) $13\,u^2$

---

4. ¿Cuál de las siguientes razones es la mayor?



   a) $\dfrac{\text{El área de a}}{\text{El área de b}}$

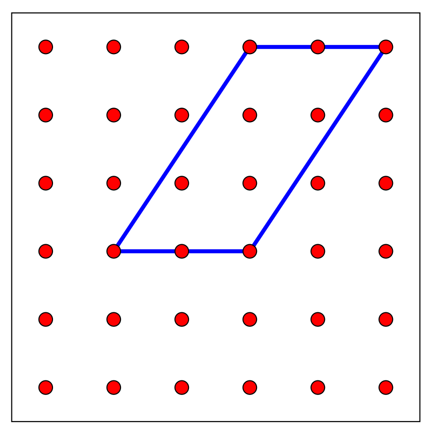
   b) $\dfrac{\text{El área de a}}{\text{El área de c}}$

   c) $\dfrac{\text{El área de b}}{\text{El área de a}}$

   d) $\dfrac{\text{El área de c}}{\text{El área de b}}$

---

5. Edgar tiene un geoplano en el cuál cada punto está situado a $1,37\,u$ de distancia a los puntos próximos verticalmente y horizontalmente. ¿Cúal es el área de este cuadrilátero que Edgar formó en su geoplano? (marque la mejor aproximación)



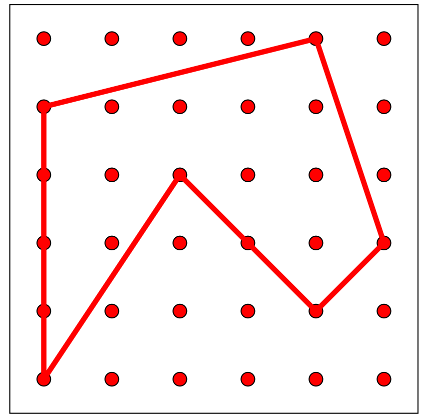
   a) $11{,}26\,u^2$

   b) $6\,u^2$

   c) $8{,}22\,u^2$

   d) $7{,}37\,u^2$

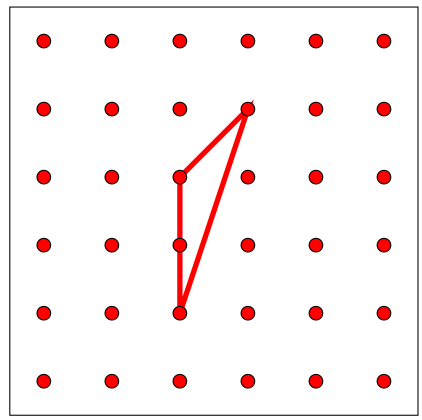
6. Jimena construyó este hexágono en un geoplano de 6×6 clavos. ¿Cuál es el área de este hexágono?



   a) $13{,}5\, u^2$
   b) $13\, u^2$
   c) $12{,}5\, u^2$
   d) $12\, u^2$

---

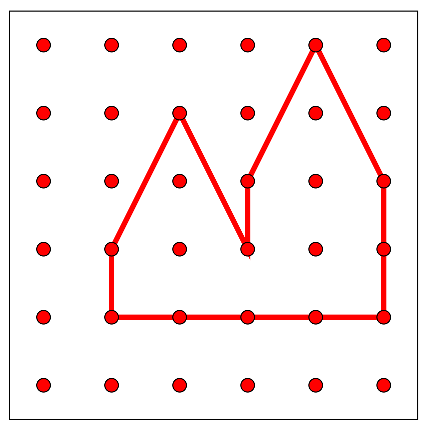
7. "Dibuje" en su geoplano la siguiente figura. ¿Cuál es el área de esa figura?



   a) $3\, u^2$
   b) $1\, u^2$
   c) $2\, u^2$
   d) $1{,}5\, u^2$

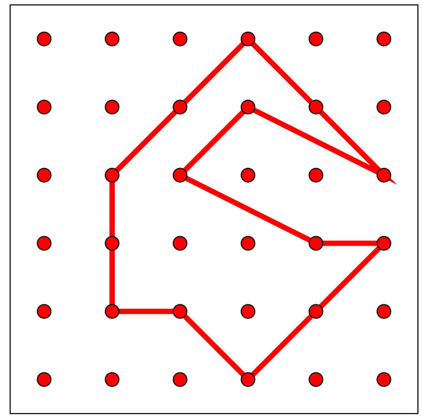
---

8. "Dibuje" en su geoplano la siguiente figura. ¿Cuál es el área de esa figura?



   a) $13{,}00\, u^2$
   b) $9{,}5\, u^2$
   c) $12, 5\, u^2$
   d) $10, 00\, u^2$

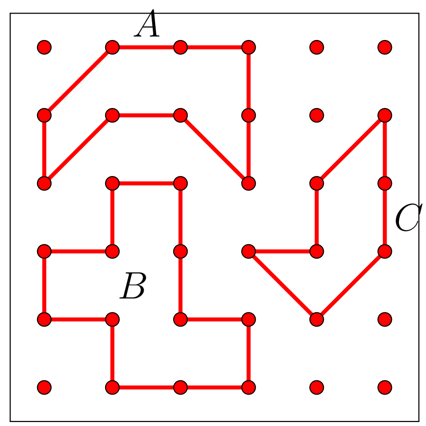
9. En su geoplano dibuje la siguiente figura. ¿Cuál es el área de esa figura?



   a) $9{,}5\,u^2$
   b) $9{,}0\,u^2$
   c) $12{,}5\,u^2$
   d) $11,0\,u^2$

---

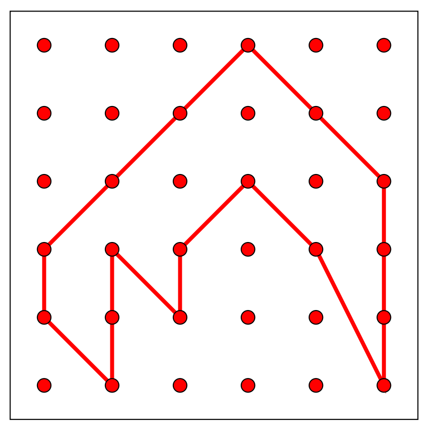
10. ¿Cuál es el área de la figura A, el perímetro de la figura B y el área de la figura C en unidades lineales y unidades cuadradas según corresponde?



   a) 3,5; 12 y 2,5.
   b) 5,5; 13 y 3,5.
   c) 4; 15 y 3,5.
   d) 3; 10 y 2,5.

---

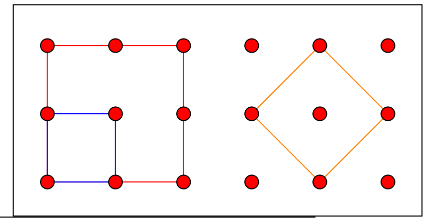
11. En su geoplano dibuje la siguiente figura. ¿Cuál es el área de esa figura?



   a) $14,50\,u^2$
   b) $15,50\,u^2$
   c) $10,50\,u^2$
   d) $16,00\,u^2$

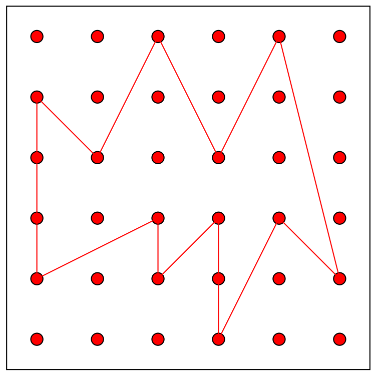
5.2. SOLUCIONES

1. Solo es posible definir tres tipos de cuadrados de distinta área tal como se muestra en la figura adjunta.



---

2. Al construir la figura en el geoplano, se observará lo siguiente:



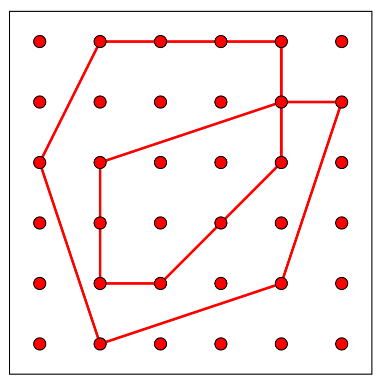
Se cuentan 5 clavos en el interior y 15 en el borde, luego el área encerrada es de: $A = \text{Puntos interiores} + \dfrac{\text{Puntos de borde}}{2} - 1 = 5 + \dfrac{15}{2} - 1 = 11,5\, u^2$

---

3. Al construir esta figura en el geoplano, observamos que:

   a) Hay 5 clavos quedan dentro de la figura.

   b) Hay 16 clavos en el borde.



Luego, el área es: $A = 5 + \dfrac{16}{2} - 1 = 5 + 8 - 1 = 12\, u^2$

---

4. La mayor de las razones se obtiene al dividir la figura de mayor área entre la menor, es decir: $\frac{\text{El área de a}}{\text{El área de c}}$

---

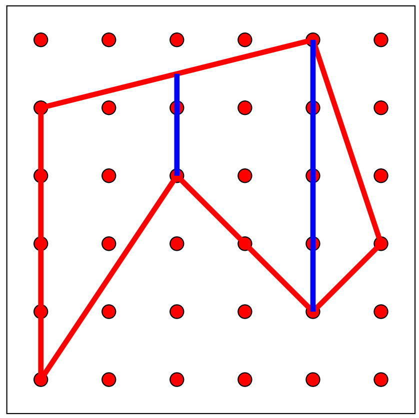
5. El área es: $A = b \cdot h = (2 \cdot 1{,}37) \cdot (3 \cdot 1{,}37) = 2{,}74 \cdot 4{,}11 \approx 11{,}26\, u^2$

6. $\boxed{\text{Método 1.}}$

Resolvamos aplicando el Teorema de Pick:

$$A = \underbrace{\frac{10}{2}}_{\text{Mitad del \#clavos que toca la liga}} + \underbrace{9}_{\text{\# de clavos dentro de la figura}} - \underbrace{1}_{\text{Resto 1}} = 13$$

$\boxed{\text{Método 2.}}$ Considere la figura dividida de la siguiente forma:



Esta figura consta de dos trapecios de base mayor 4, base menor $1{,}5$ y altura 2, así como de un triángulo de base 4 y altura 1.

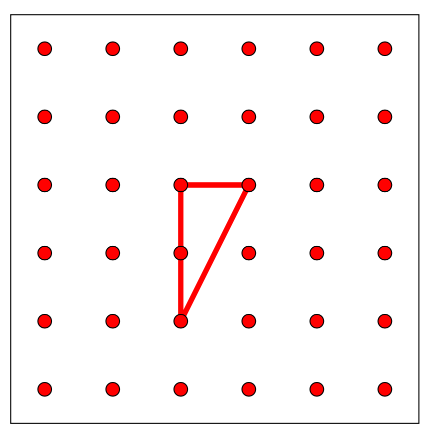
El área sería:

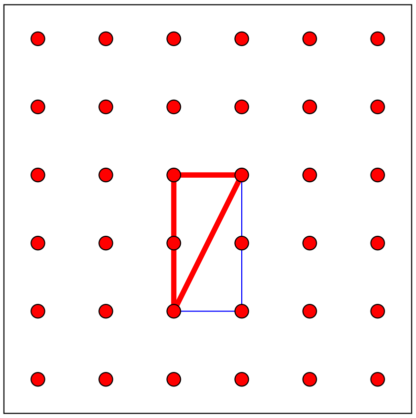
$$\begin{aligned} A &= \cancel{2} \cdot \frac{(4+1{,}5)\cdot 2}{\cancel{2}} + \frac{4\cdot 1}{2} \\ &= 5{,}5 \cdot 2 + 2 \\ &= 11 + 2 \\ &= 13 \end{aligned}$$

---

7. Obsérvese que:

El área del triángulo dado equivale a el área del siguiente triángulo rectángulo:

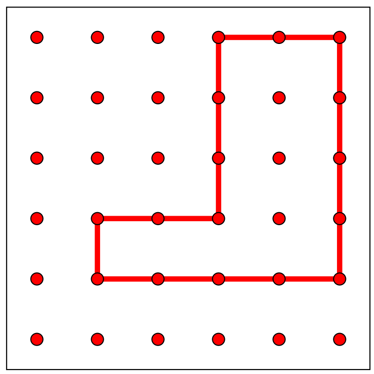




El área del triańgulo es la mitad del área del rectángulo mostrado, el cual tiene área 2, luego el triángulo tiene área 1.

---

8. El área de la figura dada equivale a el área de la siguiente figura:

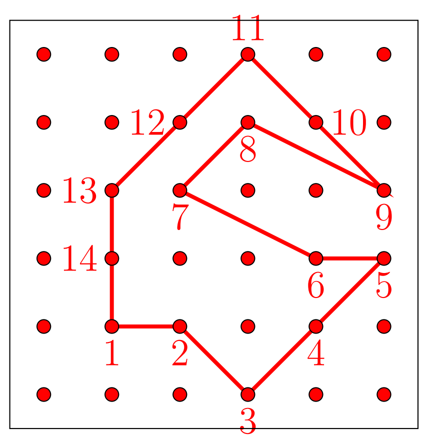


Por conteo simple de las áreas unitarias, el área de la figura es $10,00\,u^2$

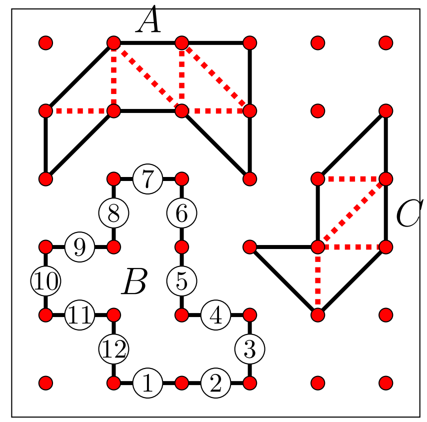
---

9. Dado que hacer movimientos de área para la figura dada puede resultar muy complicado, utilizaremos para la resolución de este ejercicio el teorema de Pick.

$$A = \frac{14}{2} + 3 - 1 = 9\,u.l.^2$$



10. Para calcular las áreas de las figuras A y C, procedamos a dividir las figuras en triangulitos, cada uno de estos triangulitos tiene área $0,5\,u.A$. La figura A tiene 3 pares y medio de triangulitos, lo que equivale a un área de $3{,}5$, la figura C tiene 2 pares y medio de triangulitos, lo que equivale a un área de $2{,}5$. Para determinar el perímetro de la figura B, basta contar los pequeños segmentos que forman la figura, de estos se cuentan 12.



Geoplano

11. Puede resolverse mediante la aplicación del teorema de Pick

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\text{cantidad de clavos en contacto con la liga}}{2} + \text{cantidad de clavos en el interior} - 1\\
&= \frac{17}{2} + 3 - 1\\
&= 10{,}50\,u^2
\end{aligned}$$

Capítulo 6

PROBLEMAS DEL PLANO CARTESIANO

Soluciones en la página 54

6.1. EJERCICIOS

1. Fiorella marcó los puntos $P(6, 2)$, $Q(1, 7)$, $R(7, 1)$ y $S(2, 5)$ en un mismo sistema de coordenadas cartesianas. ¿Cuál de estos puntos es el que tiene menor abscisa?

   a) P

   b) Q

   c) R

   d) S

---

2. Andrea dibujó un triángulo ABC en un sistema de coordenadas. Los pares ordenados de sus vértices son: $A(1, 0)$, $B(0, 0)$ y $C(0, 1)$. ¿cuál es el área del triángulo de Andrea?

   a) $0{,}5\, u^2$

   b) $1{,}5\, u^2$

   c) $1\, u^2$

   d) $0{,}75\, u^2$

3. Eduardo trazó un cuadrilátero en un sistema de coordenadas cartesianas. Sus cuatro vértices corresponden a los pares ordenados: $(2,0)$, $(4,5)$, $(5,2)$, $(1,4)$. Supongamos que en este sistema, cada cuadradito cuyos lados miden $1u$, tiene un área de $1\,u^2$. ¿Cuál es el área del cuadrilátero que Eduardo trazó? (marque la mejor aproximación)

   a) $12\,u^2$

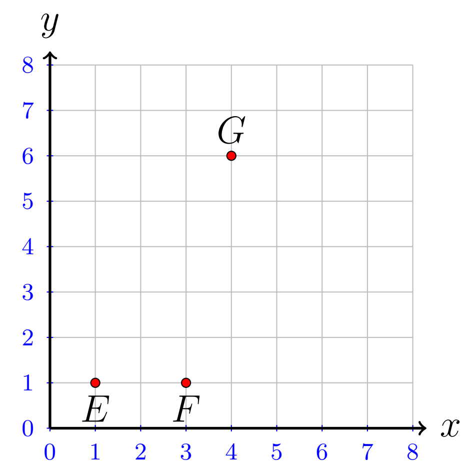
   b) $10\,u^2$

   c) $14\,u^2$

   d) $15\,u^2$

---

4. Leda marcó los puntos E, F y G en este sistema de coordenadas cartesianas. ¿Cuál puede ser el par ordenado del punto H para que E,F,G y H sean los vértices de un paralelogramo?



   a) $(6,7)$

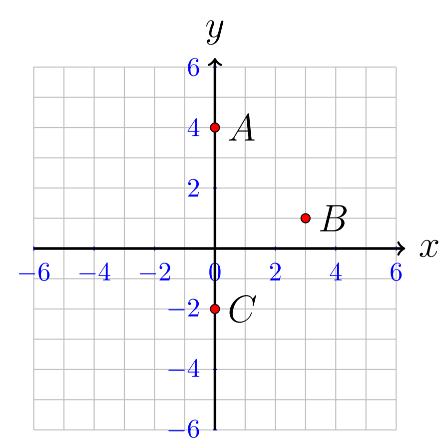
   b) $(5,1)$

   c) $(6,6)$

   d) $(7,2)$

---

5. Teresa marcó los puntos A, B y C en el sistema de coordenadas. Teresa desea marcar un punto D en este sistema de manera que A, B, C y D sean los vértices de un cuadrado. ¿Cuál es el par ordenado correspondiente a D?



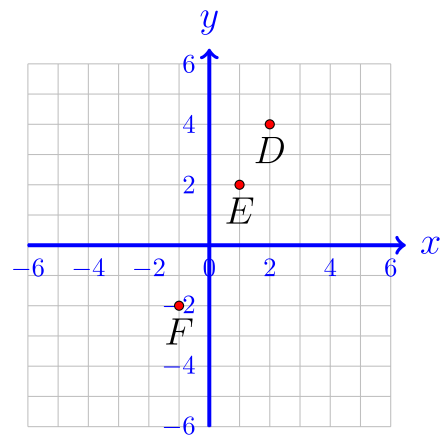
   a) $(-4,-1)$

   b) $(-3,1)$

   c) $(-2,1)$

   d) $(-5,2)$

6. Andrea y Álvaro localizaron los puntos D, E y F en el sistema de coordenadas cartesianas. Ellos desean añadir un punto G de modo que los cuatro puntos D, E, F y G pertencezcan a una misma recta. ¿Cuál podría ser el par ordenado correspondiente al punto G?



a) $(-2,-1)$

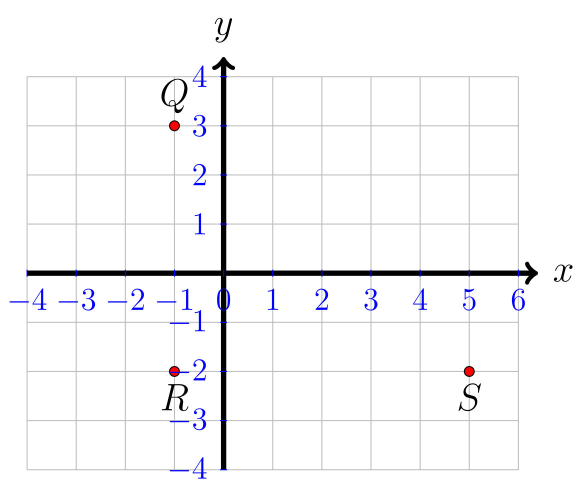
b) $(4,-4)$

c) $(-2,-4)$

d) $(1,3)$

---

7. Liliana marcó los puntos Q, R y S en un sistema de coordenadas cartesianas, tal como se muestra en la figura.



Ella quiere ahora marcar un punto T de manera que los cuatro puntos sean los vértices de un rectángulo. ¿Cuál debe ser la ordenada del punto T?

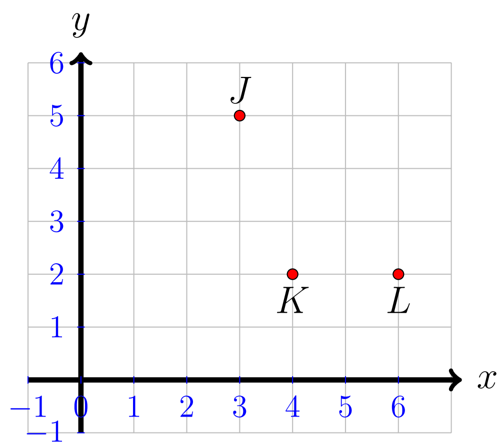
a) 3

b) 4

c) 5

d) 6

8. Emilia marcó los puntos J, K y L en un sistema de coordenadas como se muestra en la figura.

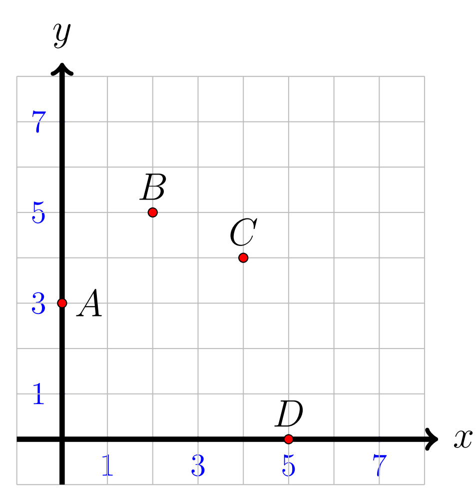


Manuel le dijo que si marcaba el punto $M(5,5)$, entonces los puntos J, K, L y M serían los vértices de un paralelogramo. Beatriz le mencionó que ella podría marcar otro punto N de manera que J, K, L y N también serían los cuatro vértices de un paralelogramo. ¿Cuál es el par ordenado de ese punto N?

a) $(5,1)$
b) $(5,5)$
c) $(1,5)$
d) $(3,5)$

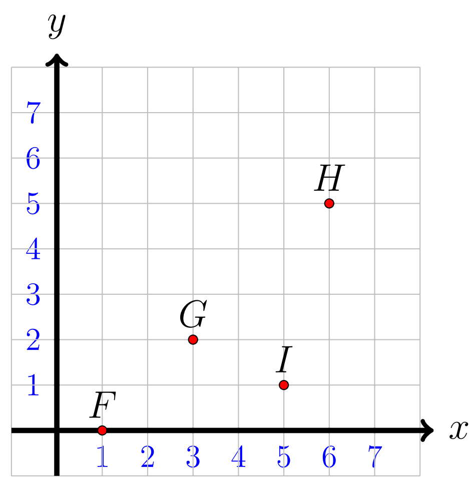
---

9. Dora examinó los puntos A, B, C y D de la siguiente figura, y encontró que uno de ellos tiene iguales su abscisa y su ordenada. Ese punto es



a) C
b) D
c) B
d) A

10. Eduardo examinó los puntos F, G, H e I de la siguiente figura.
Y determinó que en uno de estos cuatro puntos, el producto de la abscisa por la ordenada es cero. Ese punto es



a) F

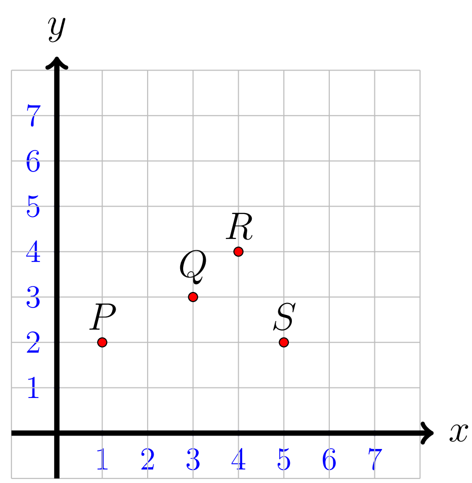
b) I

c) G

d) H

---

11. Lucía examinó los puntos P, Q, R y S, de la siguiente figura. Y realizó el producto de la abscisa por ordenada en cada uno de esos puntos. ¿En cuál de los puntos el producto encontrado por Lucía es el mayor?



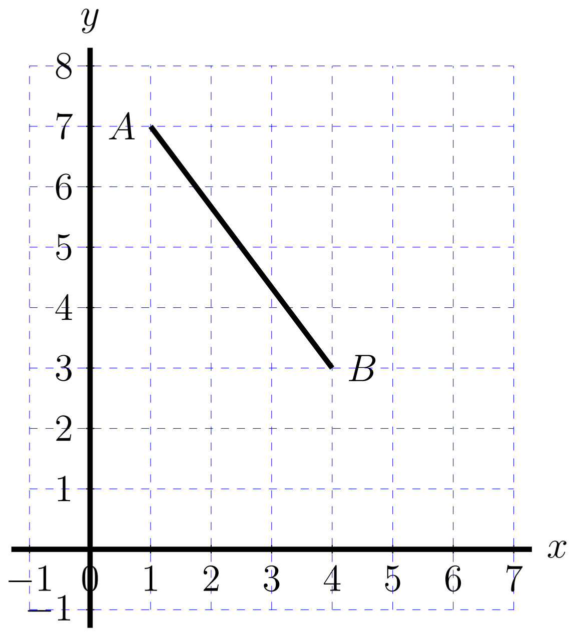
a) S

b) Q

c) R

d) P

12. En la figura se ha trazado el segmento $\overline{AB}$.



A continuación, encontramos las coordenadas de los extremos de otros segmentos

I. $\overline{CD}$, cuyos extremos son $(0, 6)$ y $(6, 6)$.

II. $\overline{EF}$, cuyos extremos son $(0, 2)$ y $(3, 5)$.

III. $\overline{GH}$, cuyos extremos son $(3, 7)$ y $(5, 2)$.

IV. $\overline{IJ}$, cuyos extremos son $(5, 2)$ y $(3, 3)$.

¿Cuál de esos cuatro segmentos tiene puntos comúnes con $\overline{AB}$?

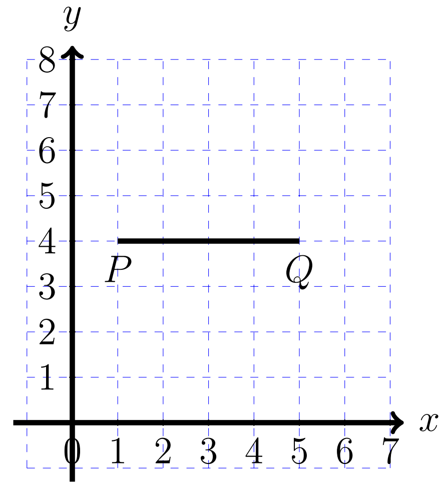
a) $\overline{CD}$ y $\overline{IJ}$.

b) $\overline{EF}$ y $\overline{CD}$.

c) $\overline{GH}$ y $\overline{CD}$.

d) $\overline{IJ}$ y $\overline{GH}$.

13. Andrea explicó a sus compañeros que el segmento es uno de los lados del triángulo que ella construyó, y que el área de dicho triángulo es $6\,u^2$. ¿Cuál de los siguientes pares ordenados no puede corresponder al otro vértice de ese triángulo?



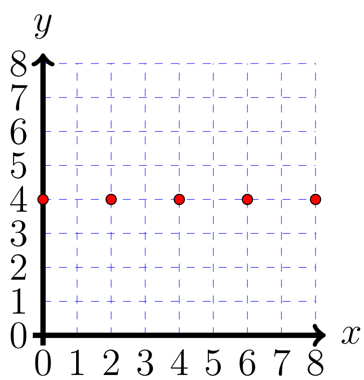
a) $(1,7)$

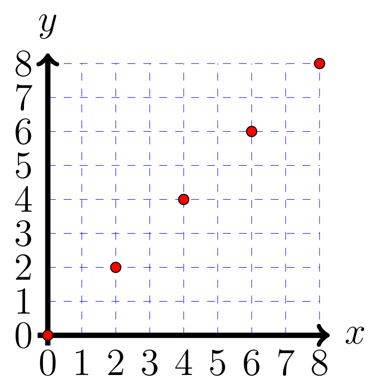
b) $(4,1)$

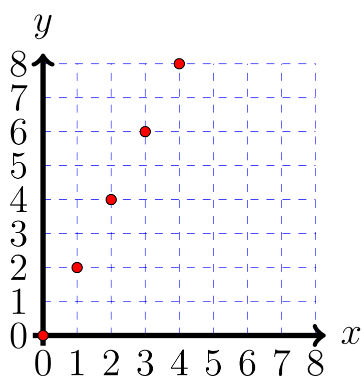
c) $(5,8)$

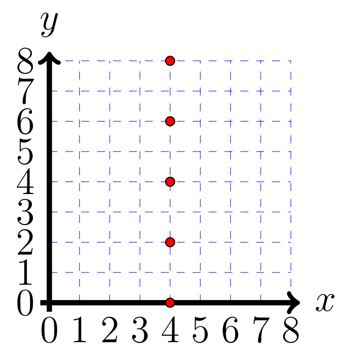
d) $(3,7)$

14. Considere las siguientes figuras:

I.


III.


II.


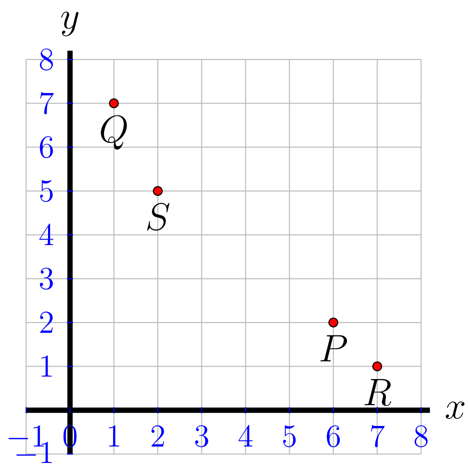
IV.


¿En cuál figura hay pares ordenados tienen iguales la abscisa y la ordenada?

a) I. b) II. c) III. d) IV.

6.2. SOLUCIONES

1. *a*) Primero ubiquemos los puntos en un plano cartesiano:

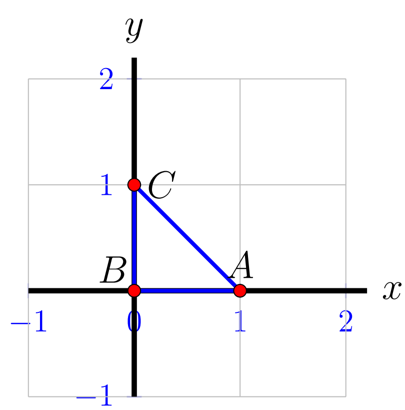


b) El punto que tiene menor abscisa es el que se ubica más a la izquierda, que es el punto Q.

Nota: El punto que se halla más "hacia la derecha" tiene mayor abscisa, el que se halla más "hacia la izquierda" tiene menor abscisa, el que se halla más "hacia arriba" tiene mayor ordenada y el que se halla más "hacia abajo" tiene menor ordenada.

---

2. *a*) Primero ubiquemos los puntos en un plano cartesiano:



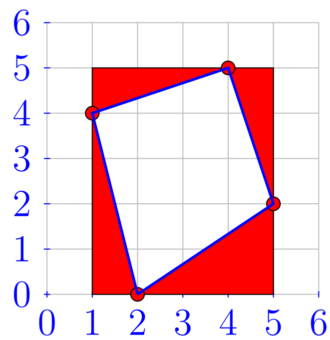
b) Considerando BA como base y BC como altura, se tiene que:

$$\begin{aligned} A &= \frac{base \cdot altura}{2} \\ &= \frac{BA \cdot BC}{2} \\ &= \frac{1 \cdot 1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \\ &= 0{,}5\, u^2 \end{aligned}$$

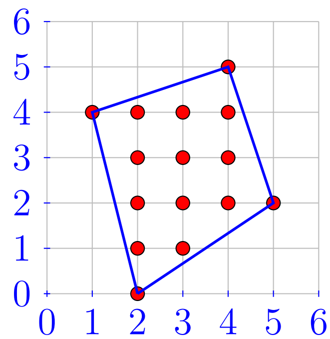
---

3. $\boxed{\text{Método 1}}$ Para resolver el ejercicio, primero lo representamos los puntos en el plano cartesiano y destacamos con color rojo cuatro triángulos rectángulos para completar un rectángulo. El área buscada será la del rectángulo menos la de los 4 triángulos rojos.

Así: $A = 4 \cdot 5 - \dfrac{1 \cdot 4}{2} - \dfrac{3 \cdot 2}{2} - \dfrac{1 \cdot 3}{2} - \dfrac{3 \cdot 1}{2} = 20 - 2 - 3 - 1{,}5 - 1{,}5 = 12\, u^2$

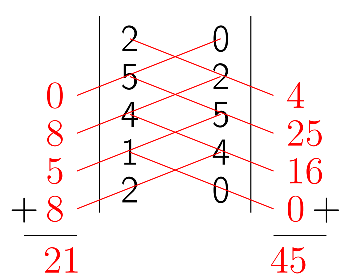


$\boxed{\text{Método 2}}$ Consideremos la figura en el plano cartesiano y destaquemos los puntos interiores y los que yacen sobre los lados del cuadrilátero:



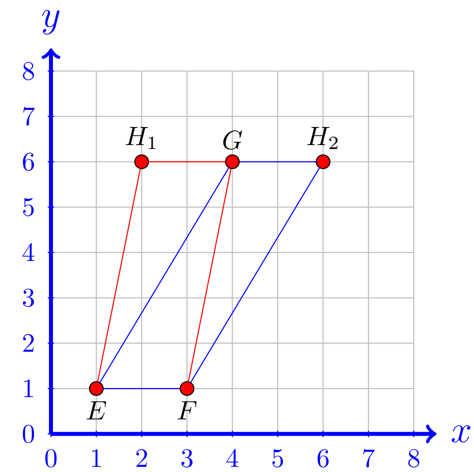
En total se destacan 11 puntos en el interior y 4 en el borde, luego el área es: $A = \text{Puntos internos} + \dfrac{\text{Puntos de borde}}{2} - 1 = 11 + \dfrac{4}{2} - 1 = 12\,u^2$

$\boxed{\text{Método 3}}$ Escribamos dentro de una "cajilla" los pares ordenados en orden en el sentido antihorario iniciando con el par $(2, 0)$ y finalizando con el mismo de la siguiente forma, realicemos los productos cruzados y sumemos los valores de tales productos:



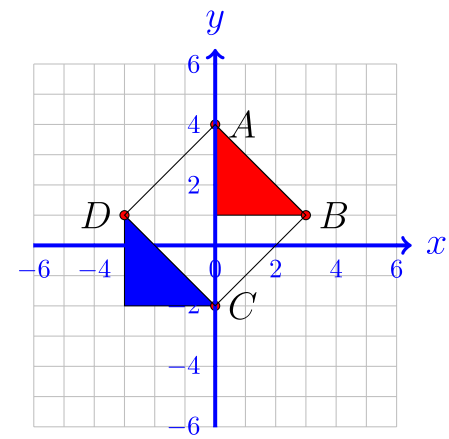
Luego $A = \dfrac{1}{2}(\text{Suma derecha} - \text{Suma izquierda}) = \dfrac{1}{2}(45 - 21) = \dfrac{1}{2} \cdot 24 = 12\,u^2$

4. Existen dos posibles respuestas, una es ubicar el punto H dos unidades a la derecha del punto G o bien dos unidades a la izquierda, luego los puntos pueden ser $H_1(2,6)$ o bien $H_2(6,6)$.



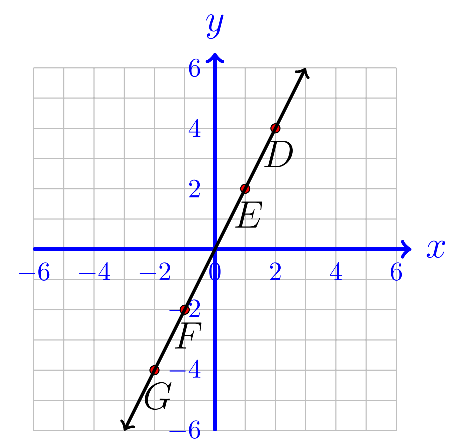
---

5. Teresa idea construir el triángulo rojo y replicarlo convenientemente como el triángulo azul, tal como se muestra en la figura. Resulta claro que el vétice buscado es $(-3,1)$



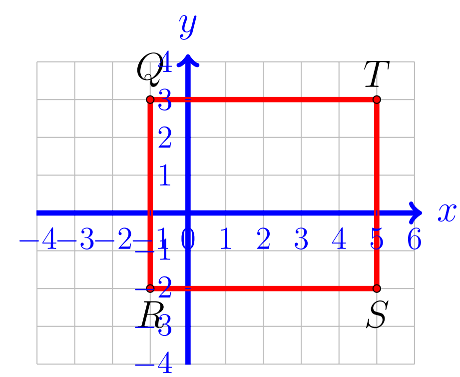
---

6. Trazando una recta que pase por D, E y F, se observa que de los puntos dados, el punto $(-2,-4)$ yace sobre esta recta.

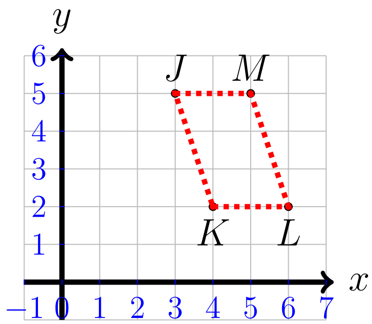


---

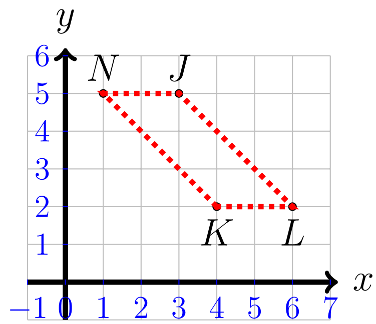
7. Liliana coloca el punto T en la coordenada $(5,3)$ y observa el rectángulo buscado, luego la ordenada del punto T es 3:



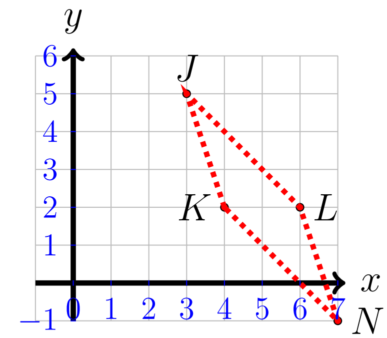
8. Las posibilidades son:



Solución de Manuel



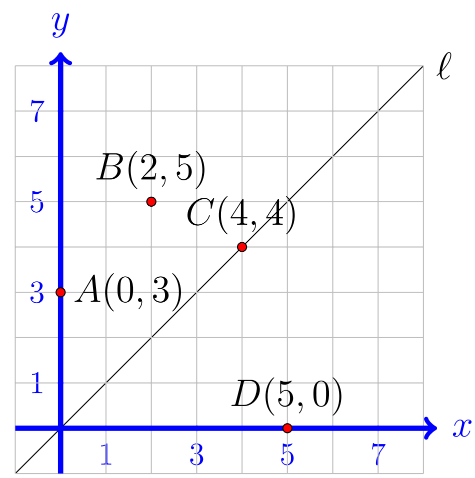
Posible solución de Beatriz $(1, 5)$



Posible solución de Beatriz $(7, -1)$

---

9. Sabemos que los puntos que poseen igual abscisa que ordenada son los que pertenecen a la recta ℓ, así el punto con la característica deseada es C.



---

10. Resolvamos mediante dos métodos:

Método 1 Cualquier punto que se halle sobre el eje de las abscisas o bien sobre el eje de las ordenadas tiene la característica de que el producto de su abscisa por su ordenada es cero, pues los que se hallan sobre el eje de las abscisas son de la forma $(x, 0)$ y los que se hallan sobre el eje de las ordenadas son de la forma $(0, y)$, es así que el punto que tiene la característica indicada debe ser el punto F, que tiene coordenadas $(1, 0)$.

Método 2 Considere los datos de la tabla:

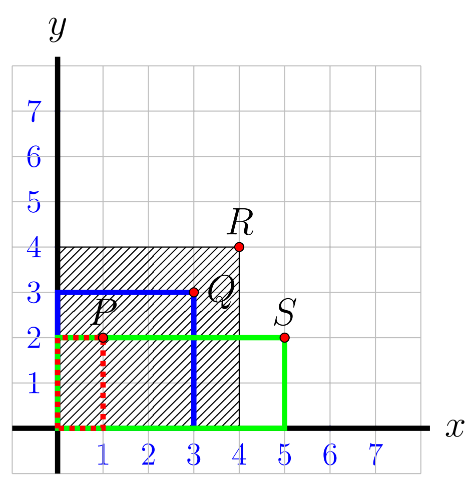
Punto	Abscisa	Ordenada	Producto
F	1	0	$\boxed{0}$
G	3	2	6
I	5	1	5
H	6	5	30

Se deduce que el punto cuyo producto entre abscisas y ordenadas es cero, corresponde al punto F.

---

11. Resolvamos mediante dos métodos:

Método 1 Considere los siguientes rectángulos, el de borde rojo discontínuo, el de borde azul, el de borde negro y el de borde verde.



Por simple observación, el de mayor área es el rectángulo de borde negro, así, en el punto R se debe tener el mayor producto entre la abscisa y la ordenada.

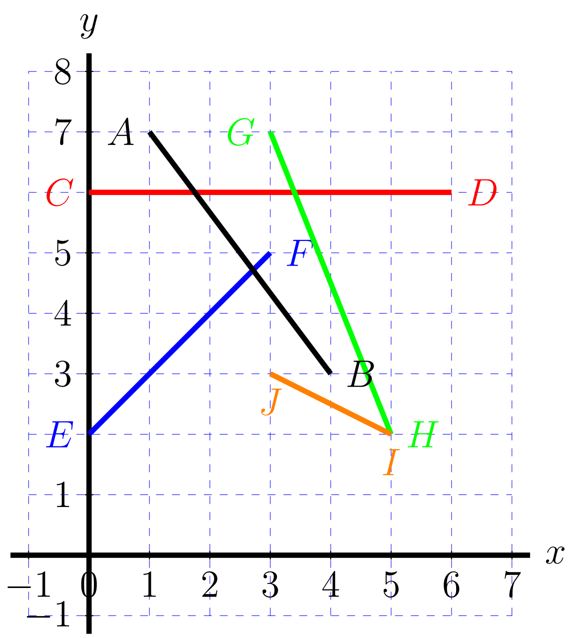
Método 2 Considere los datos de la tabla:

Punto	Abscisa	Ordenada	Producto
P	1	2	2
Q	3	3	9
R	4	4	$\boxed{16}$
S	5	2	10

Se deduce que el mayor producto se obtiene para las coordenadas del punto R.

---

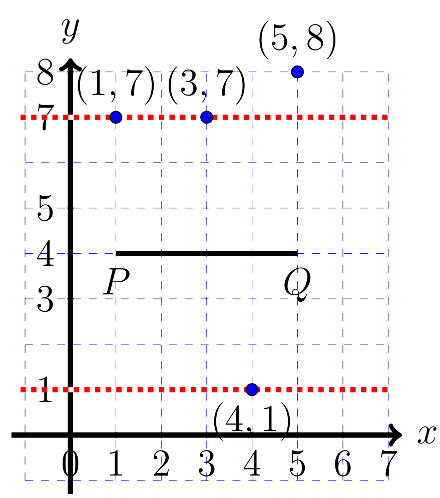
12. Tracemos los segmentos indicados en el mismo plano cartesiano.



Se observa que el segmento $\overline{AB}$ presenta puntos en común con los segmentos $\overline{EF}$ y $\overline{CD}$.

---

13. Dado que el área del triángulo debe ser $6\,u^2$ y este posee una base de longitud 4, entonces la altura de dicho triángulo debe ser 3, pues $A = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6$. Es así, que el tercer vértice debe yacer en algún lugar sobre la línea roja discontinua, ubicando los puntos dados, es claro que el punto $(5, 8)$ no puede corresponder con las coordenadas del vértice faltante.



Los puntos que tienen abscisa igual a su ordenada son los puntos de la forma (x, x), luego, la opción correcta es la figura III pues los puntos dados tienen coordenadas: $(0, 0)$, $(2, 2)$, $(4, 4)$, $(6, 6)$ y $(8, 8)$. La opción correcta es la III.

Capítulo 7

PROBLEMAS DE CONVERSIONES

7.1. EJERCICIOS

Soluciones en la página 63

1. Axel y Mariana sumaron los siguientes cuatro números: veinte centésimos, 0.25, 144 milésimos y 1500 milésimos. Halle la suma que obtuvieron?

   a) $\frac{1023}{500}$
   b) $\frac{2054}{1000}$
   c) $\frac{1047}{500}$
   d) $\frac{1042}{500}$

---

2. Un automóvil deportivo viaja de modo que cada $36\,min$ recorre $24\,km$. Si su velocidad no cambia, la velocidad de este auto en kilómetros por hora, es

   a) $35\,\frac{km}{h}$
   b) $40\,\frac{km}{h}$
   c) $42\,\frac{km}{h}$
   d) $50\,\frac{km}{h}$

3. Ana dijo: tengo menos de 6 pies de estatura pero más de 2 pies. Mi estatura en pulgadas es un múltiplo de 7 y también 2 pulgadas mayor que un múltiplo de 6. ¿Cuál es la estatura de Ana en pulgadas? (1 pie equivale a 12 pulgadas.)

    a) 56

    b) 54

    c) 63

    d) 60

---

4. ¿Cuánto suman veintinueve centésimos y setecientos milésimos?

    a) 0,099

    b) 0,729

    c) 0,99

    d) 7,29

7.2. SOLUCIONES

1. Basta sumar y simplificar:

$$\begin{aligned}\frac{20}{100}+0{,}25+\frac{144}{1000}+\frac{1500}{1000} &= 0{,}02+0{,}25+0{,}144+1{,}5\\ &= 2{,}094\\ &= \frac{2094}{1000}\\ &= \frac{1047}{500}\end{aligned}$$

---

2. $\boxed{\text{Método 1}}$ Como el auto recorre en 36 minutos 24 kilómetros, es claro que el automóvil recorre en 1 minuto 36 veces menos distancia, luego recorre en un minuto $\frac{24}{36}\,km$ o $\frac{2}{3}\,km$, así en una hora (o 60 minutos) recorrerá 60 veces esta distancia, es decir: $60\cdot\frac{2}{3}\,km$ lo que equivale a $\frac{120}{3}\,km$ o $40\,km$
$\boxed{\text{Método 2}}$ Aplicando una regla de tres simple:

$$\begin{aligned}36\,min &\to 24\,km\\ 60\,min &\to x\end{aligned}$$

Así: $x=\dfrac{60\cdot\cancelto{2}{24}}{\cancelto{3}{36}}=\dfrac{60\cdot 2}{3}=\dfrac{120}{3}=40\,km$ esto significa que en $60\,min$ recorre $40\,km$, es decir, el automóvil viaja a $40\,\frac{km}{h}$

---

3. De acuerdo con lo dicho por Ana, su estatura está entre 24 pulgadas y 72 pulgadas, pues cada pie tiene 12 pulgadas, los múltiplos de 7 que satisfacen esta condición son: 28,35,42,49,56,63 y 70, al reducir 2 a cada una de estas medidas se tiene: 26,34,40,47,54,61 y 68, de estos últimos solo resulta ser múltiplo de 6 el 54, luego Ana mide 56 pulgadas.

---

4. Basta sumar:

$$\begin{aligned}\frac{29}{100}+\frac{700}{1000} &= 0{,}29+0{,}7\\ &= 0{,}99\end{aligned}$$

Capítulo 8

PROBLEMAS DE PORCENTAJES

Soluciones en la página 68

8.1. EJERCICIOS

1. ¿Cuál es el $25\,\%$ de $\frac{1}{50}$?

   a) $\frac{1}{200}$

   b) $\frac{1}{100}$

   c) $\frac{1}{250}$

   d) $\frac{1}{1000}$

---

2. Daniela trazó un segmento AC de manera que el punto B es el punto medio de AC y C es el punto medio del segmento BD. ¿Qué tanto por ciento de la longitud del segmento CD es la longitud del segmento AC?

   a) $100\,\%$

   b) $200\,\%$

   c) $150\,\%$

   d) $50\,\%$

3. Cuando a Javier le aumentaron el sueldo en un $50\,\%$, él empezó a ganar $90\,000$ colones por semana. ¿Cuál era el sueldo semanal de Javier en colones antes del aumento?

   a) $45\,000$
   b) $60\,000$
   c) $75\,000$
   d) $80\,000$

---

4. ¿Qué tanto por ciento de 111 es 11? (marque la mejor aproximación)

   a) $12{,}11$
   b) $9{,}91$
   c) $11{,}11$
   d) $7{,}91$

---

5. El número uno de la revista de comics llamada "Action Comics", se vendió en los Estados Unidos en 10 centavos de dólar. Ese ejemplar vale hoy $\$18500,00$. El precio de este ejemplar se incrementó en un

   a) $18\,500\,000\,\%$
   b) $18\,000\,\%$
   c) $1\,849\,990\,\%$
   d) $18\,499\,900\,\%$

---

6. Carlos Enrique calculó el diecinueve por ciento de 119 y obtuvo

   a) $19{,}56$
   b) $32{,}78$
   c) $22{,}61$
   d) $43{,}54$

7. ¿Cuál es el $30\,\%$ del $30\,\%$ de 4600?

   a) 1380

   b) 276

   c) $124{,}2$

   d) 414

8.2. SOLUCIONES

1. $\boxed{\text{Método 1.}}$ Calcular el $25\,\%$ de $\frac{1}{50}$ es lo mismo que determinar la cuarta parte de $\frac{1}{50}$, es decir, realicemos $\frac{1}{50} \div 4$

$$\frac{1}{50} \div 4 = \frac{1}{50} \div \frac{4}{1} = \frac{1 \cdot 1}{50 \cdot 4} = \frac{1}{200}$$

$\boxed{\text{Método 2.}}$ El $25\,\%$ de $\frac{1}{50}$ equivale a calcular $0{,}25 \cdot 0{,}02$

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & 0, & 2 & 5 \\
 & & \times & 0, & 0 & 2 \\
\hline
 & & & 0 & 5 & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 & \\
+ & 0 & 0 & 0 & & \\
\hline
 & 0, & 0 & 0 & 5 & 0
\end{array}$$

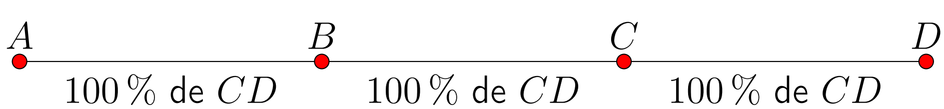
Solo falta convertir $0,0050$ a fracción:

$$0{,}0050 = \frac{50}{10000} = \frac{5}{1000} = \frac{1}{200}$$

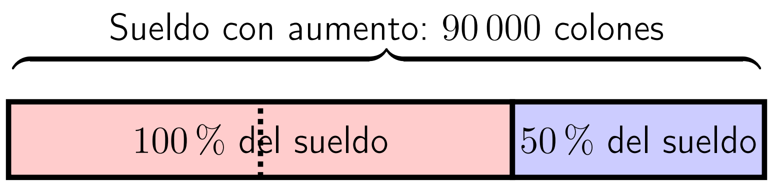
Evidentemente, este método es más lento que el anterior, por ello es importante identificar el $25\,\%$ de un número como su cuarta parte.

2. *a*) Representemos los segmentos tal como lo describe el enunciado:

b) Es claro que CD es el $100\,\%$ de la longitud CD, de igual forma AB es el $100\,\%$ de CD y BC es el $100\,\%$ de CD, luego la longitud de AC es el $200\,\%$ de CD.



3. Considere la siguiente representación:



Resulta claro que cada parte de la representación vale $30\,000$ colones, así, el sueldo antes del aumento tuvo que ser de $60\,000$ colones.

---

4. Basta resolver la siguiente regla de tres simple:

$$\begin{array}{rcl} 111 & \rightarrow & 100\,\% \\ 11 & \rightarrow & x \end{array}$$

Así: $x = \dfrac{11 \cdot 100\,\%}{111} = \dfrac{1100}{111}\,\% \approx 9,91\,\%$

---

5. El incremento en el precio fue de: $\$18500 - \$0{,}1$, es decir, de $\$18499,9$, resolvamos ahora mediante una regla de tres.

$$\begin{array}{rcl} 18499{,}9 & \rightarrow & x \\ 0,1 & \rightarrow & 100\,\% \end{array}$$

De aquí: $x = \dfrac{18\,499{,}9 \cdot 100\,\%}{0{,}1} = \dfrac{1\,849\,990}{{,}1} = 18\,499\,900\,\%$

---

6. Carlos Enrique debe calcular: $19\,\%$ de 119, es decir: $0{,}19 \cdot 119$.

$$\begin{array}{cccccc} & & & 1 & 1 & 9 \\ & & \times & 0, & 1 & 9 \\ \hline & & 1 & 0 & 7 & 1 \\ & & 1 & 1 & 9 & \\ + & 0 & 0 & 0 & & \\ \hline & 0 & 2 & 2, & 6 & 1 \end{array}$$

El resultado es $22{,}61$

7. Razonemos de la siguiente forma, el $10\,\%$ de 4600 es 460, luego el $30\,\%$ será tres veces más, es decir $460 \times 3 = 1380$. Calculemos nuevamente el $30\,\%$ de 1380, usando el mismo razonamiento, el $10\,\%$ de 1380 es 138, así el $30\,\%$ será tres veces más, es decir $138 \times 3 = 414$.

Capítulo 9

PROBLEMAS PROGRESIONES Y SECUENCIAS

Soluciones en la página 72

9.1. EJERCICIOS

1. Examamine la secuencia de números $1, 4, 7, 10, \ldots, 193$. ¿Cuál es la suma de todos estos números?

   a) 5766

   b) 5935

   c) 6109

   d) 6305

2. ¿Cuál es la $2018^{\underline{ava}}$ letra de la secuencia ABCDEDCBABCDEDCBABCD...?

   a) B

   b) E

   c) D

   d) A

9.2. SOLUCIONES

1. Método 1 Restando uno a cada uno de los términos, la secuencia queda:

$$0, 3, 6, 9, \ldots, 192$$

Fácilmente se observa que todos los números son múltiplos de tres, mismos que se pueden escribir como:

$$3 \cdot 0, 3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3, \ldots, 3 \cdot 64$$

Rápidamente nos percatamos que son 65 números los de la lista original, luego, podríamos calcular su suma así:

$$S = \frac{(\text{El primero} + \text{El último}) \times \text{Número de términos}}{2} = \frac{(1 + 193) \cdot 65}{2} = 6305$$

Método 2 Apliquemos la fórmula: $S_n = [2 \cdot a_1 + d(n-1)]\frac{n}{2}$

$$\begin{aligned} S_{65} &= [2 \cdot 1 + 3(65 - 1)] \cdot \frac{65}{2} \\ &= [2 + 3 \cdot 64] \cdot \frac{65}{2} \\ &= [2 + 192] \cdot \frac{65}{2} \\ &= 194 \cdot \frac{65}{2} \\ &= 97 \cdot 65 \\ &= 6305 \end{aligned}$$

---

2. Método 1.

Si alguien tuviese el coraje suficiente como para hacer la lista de las 2018 letras, obtendría una como esta:

ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB
ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB
ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB
ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB
ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB
ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB

ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB
ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB
ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB
ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB
ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB
ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB
ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB
ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB
ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB
ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB
ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB
ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB
ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB
ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB
ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB
ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB
ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB
ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB
ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB
ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB
ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB
ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB
ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB
ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB
ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB
ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB
ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB
ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB
ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB
ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB
ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB

ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB
ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB
ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB
ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB
ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB
A$\boxed{\text{B}}$

Se observaría que la letra que ocupa la posición 2018 es una B, sin embargo, como se puede apreciar este método no es práctico.

$\boxed{\text{Método 2.}}$

La secuencia básica es ABCDEDCB, esta cuenta con 8 letras, resolvemos entonces:

$$\begin{array}{r|l} 2018 & 8 \\ \cline{2-2} 41 & 252 \\ 18 & \\ 2 & \end{array}$$

Como el residuo obtenido es 2 y el cociente es 252, quiere decir que la secuencia ABCDEDCB se repite 252 veces y se requieren dos letras más para alcanzar las 2018 letras, es decir, la última letra debe ser una B.

Capítulo 10

PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

Soluciones en la página 81

10.1. EJERCICIOS

1. ¿Cuántas diagonales tiene un trapecio isósceles?

   a) 2

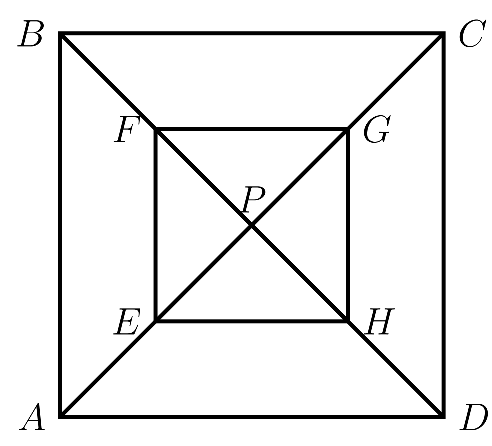
   b) 4

   c) 6

   d) 8

---

2. En la figura ABCD es un cuadrado. E,F,G y H son los puntos medios de AP, BP, CP y DP respectivamente. ¿Qué fracción del área del ABCD es el área del cuadrado EFGH?



   a) $\frac{1}{2}$

   b) $\frac{1}{3}$

   c) $\frac{1}{4}$

   d) $\frac{2}{3}$

3. Una circunferencia de radio $1\,cm$ es inscrita en un cuadrado. ¿Cuál es el área de ese cuadrado en centímetros cuadrados?

   a) 4

   b) 6

   c) 2

   d) 1

---

4. Aquí vemos cuatro tríos de números racionales. ¿Cuál trío no puede ser las tres longitudes de los lados de un triángulo?

   a) $1, 2, 4$

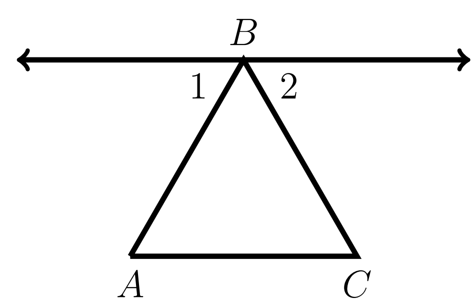
   b) $3, 4, 6$

   c) $4, 5, 7$

   d) $5, 6, 8$

---

5. En la figura vemos un triángulo equilátero ABC y una línea recta paralela a la base del $\triangle ABC$. ¿Cuál es la suma de las medidas de los ángulos 1 y 2?



   a) $60°$

   b) $90°$

   c) $120°$

   d) $180°$

6. Examine las cuatro proposiciones siguientes:

   A. Todos los radios de la circunferencia c tienen longitudes menores que las de los diámetros de c.

   B. Todas las cuerdas que podemos trazar en la circunferencia c, tienen la misma longitud.

   C. Todas las secantes a la circunferencia c, tienen la misma longitud.

   D. Todo diámetro de c es una cuerda de c.

   ¿Cuáles de estas proposiciones son verdaderas?

   a) A y C

   b) Solamente A

   c) A y D

   d) Solamente B

---

7. ¿Cuál de los siguientes polígonos tiene más diagonales?

   a) triángulo

   b) rectágulo

   c) pentágono

   d) decágono

---

8. Eduardo multiplicó el número de lados de un octógono por el número de vértices de un triángulo y luego sumó a este producto el número de diagonales de un rectángulo. Eduardo obtuvo el número

   a) 24

   b) 26

   c) 40

   d) 48

9. ¿Cuál es el área de un cuadrado cuyo perímetro es $48\,cm$?

   a) $192\,cm^2$

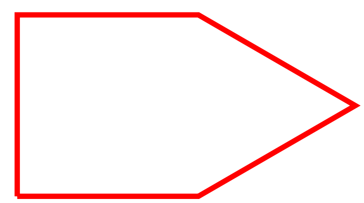
   b) $144\,cm^2$

   c) $48\,cm^2$

   d) $36\,cm^2$

---

10. La figura que se muestra fue construida poniendo juntos un cuadrado cuyo perímetro es $28\,cm$ y un triángulo equilátero cuyo perímetro es $21\,cm$. ¿Cuál es su perímetro?



   a) $35\,cm$

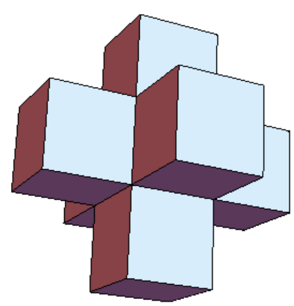
   b) $42\,cm$

   c) $49\,cm$

   d) $56\,cm$

---

11. María construyó el sólido que se muestra utilizando siete cubos unitarios.



¿Cuántos cubos de la misma medida de los anteriores necesita María para completar un cubo de lado tres?

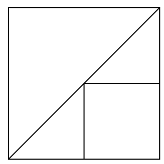
   a) 15 cubos

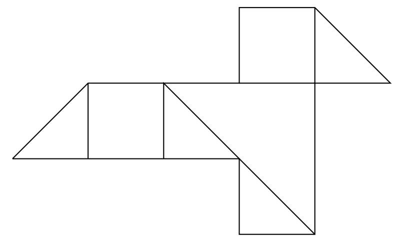
   b) 20 cubos

   c) 13 cubos

   d) 27 cubos

12. María Fernanda tiene varios cuadrados de papel de área $4\,u^2$. Corta cada uno en cuadrados y triángulos rectángulos como muestra la figura a la izquierda. Con algunas piezas hace un pájaro como muestra la figura de la derecha. ¿Cuál es el área del pájaro?





a) $8\,u^2$ *b*) $6\,u^2$ *c*) $10\,u^2$ *d*) $12\,u^2$

---

13. Pamela tiene 38 fósforos, y con todos ellos construye un triángulo y un cuadrado. Cada lado del triángulo consiste de 6 fósforos. ¿Cuántos fósforos hay en cada lado del cuadrado?

   a) 4

   b) 6

   c) 5

   d) 7

---

14. Si un terreno de forma cuadrada mide $60\,m$ de perímetro, entonces, ¿cuál es la medida de su lado en metros y área en metros cuadrados, respectivamente?

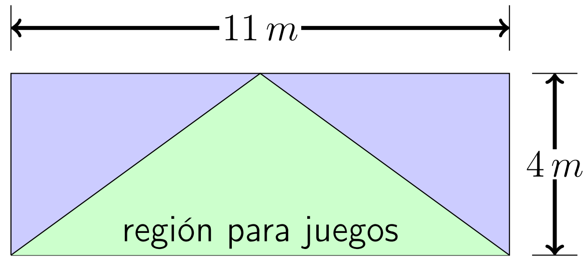
   a) 225 y 15

   b) 400 y 20

   c) 20 y 400

   d) 15 y 255

15. La casa de la familia Murillo tiene un jardín rectangular de $11\,m$ de largo por $4\,m$ de ancho. Si deciden construir en el jardín una región triangular para que los niños jueguen, como se muestra en la siguiente figura.



¿Cuál es el área de la región para juegos?

a) $11\,m^2$

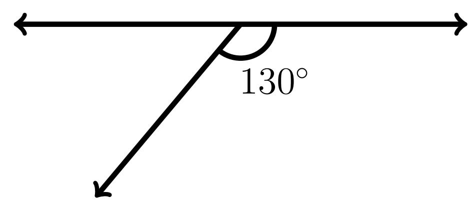
b) $33\,m^2$

c) $22\,m^2$

d) $44\,m^2$

---

16. En la figura, el ángulo obtuso tiene una medida de $130°$. ¿Cuál es la mitad de la cuarta parte de la medida del ángulo agudo?



a) $25°$

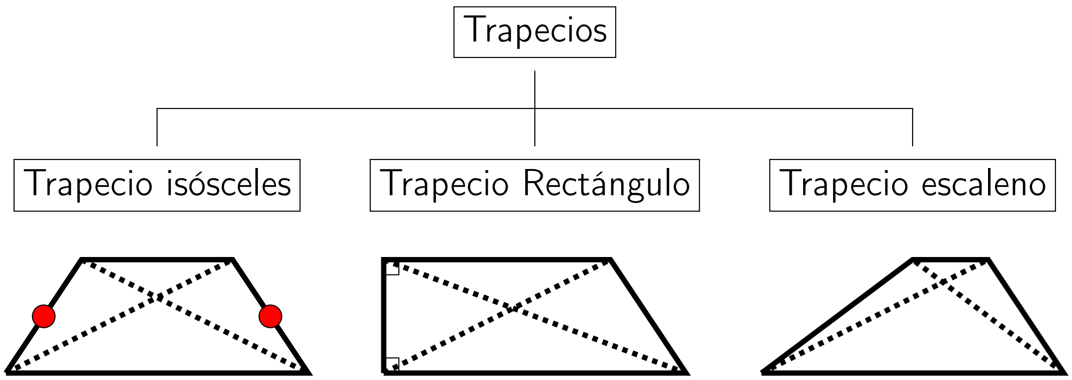
b) $6{,}25°$

c) $12{,}5°$

d) $1{,}25°$

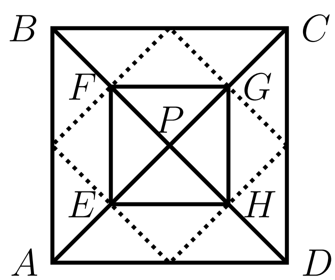
10.2. SOLUCIONES

1. Recordemos que un trapecio es un cuadrilátero con solo un par de lados opuestos paralelos. Se distinguen tres tipos de trapecios.



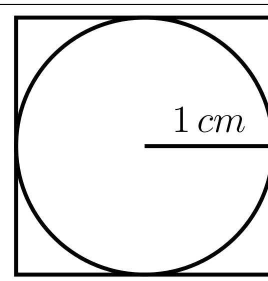
Nótese que en cualquier caso, los trapecios solo tienen dos diagonales.

2. La figura puede ser dividida como se muestra:



Es fácil ver que el área del cuadrado EFGH es la cuarta parte del área del cuadrado ABCD.

3. La redacción del problema, nos indica que la situación es la que se observa en la imagen. Se deduce que el lado del cuadrado mide $2\,cm$ y por tanto su área es de $4\,cm^2$



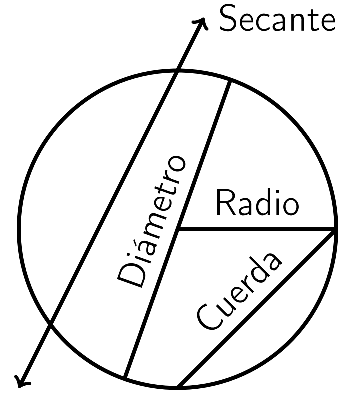
4. Si las medidas corresponden a los lados de un triángulo, entonces la suma de los dos datos menores debe ser mayor que el mayor de los datos, luego la opción que no puede ser es la a), pues $1 + 2 \ngtr 4$

5. El ángulo ABC mide 60° pues el triángulo es equilátero, así:

$$m\angle 1 + m\angle 2 = 120^\circ$$

---

6. Para resolver este ejercicio, se debe tener claro los elementos que se destacan en la figura. Se observa que A y D son correctas.



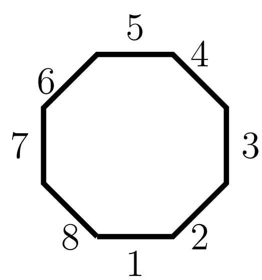
---

7. Cuántos más lados tenga un polígono, más diagonales tiene, por ello la respuesta correcta es decágono.

---

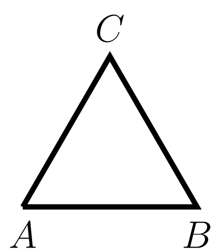
8. Nótese lo siguiente:

Octógono



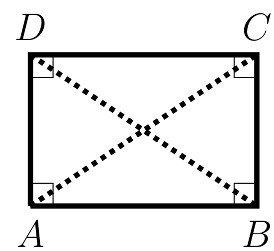
Tiene 8 lados

Triángulo



Tiene 3 vértices

Rectángulo



Tiene 2 diagonales

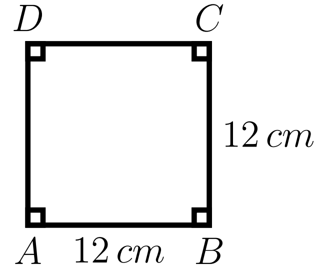
Luego Eduardo realizó: $\underbrace{8 \cdot 3}_{24} + 2 = 24 + 2 = 26$

---

9. Resolvamos en dos pasos:

   $\boxed{1}$ El lado del cuadrado mide:
   $\ell = \dfrac{P}{4} = \dfrac{48\,cm}{4} = 12\,cm$

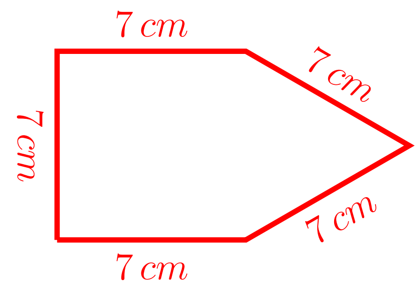
   $\boxed{2}$ El área del cuadrado es:
   $A = \ell \times \ell = 12\,cm \times 12\,cm = 144\,cm^2$



10. $\boxed{1}$ Cada lado del cuadrado mide $\ell_{\square} = \dfrac{P}{4} = \dfrac{28\,cm}{4} = 7\,cm$

$\boxed{2}$ Cada lado del triángulo mide $\ell_{\triangle} = \dfrac{P}{3} = \dfrac{21\,cm}{3} = 7\,cm$

Colocando los datos en la figura se tiene:

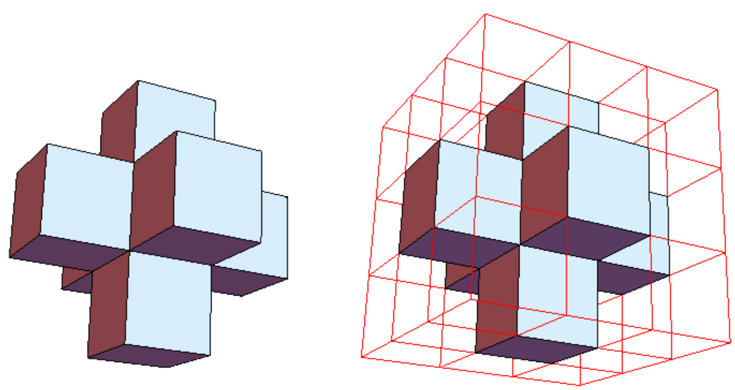


Así, el perímetro de la figura es de $5 \cdot 7\,cm$, es decir $35\,cm$.

---

11. Veamos dos posibles resoluciones:

$\boxed{\text{Método 1}}$ Para resolver esto,imaginemos que la figura se completa con otros bloques hasta completar un cubo de lado tres, tal como se muestra en la figura.



Este nuevo cubo cuya arista mide 3, será formado por $3 \times 3 \times 3$ cubos, es decir 27 cubos, y como ya se tenían 7 cubos, entonces se necesitan 20 para completar dicho cubo.

$\boxed{\text{Método 2}}$ Un cubo de arista 3, está formado por $3 \times 3 \times 3$ cubos, es decir 27 cubos unitarios, lo que se puede interpretar como tres capas de 9 cubos en cada capa, como se logra apreciar en la figura anterior, en la capa inferior solo hay un cubo, luego faltan 8 para completar la capa, en la segunda capa hay 5 cubos, en esta faltan 4 cubos para completar la capa y nuevamente en la capa superior faltan 8 cubos, en total faltan $8+4+8$ cubos, es decir 20 cubos.

---

12. Resolvamos mediante dos métodos:

Método 1 Para resolver este problema, María Fernanda observó que uno de los triángulos grandes tiene área $2\,u^2$ y que la suma del área de dos triángulos pequeños más un cuadrado pequeño también tienen un área de $2\,u^2$.

El pájaro está formado por:

Figura	Área
Triángulo grande	$2\,u^2$
Cuadrado pequeño y dos triángulos pequeños	$2\,u^2$
Cuadrado pequeño y dos triángulos pequeños	$2\,u^2$
Total	$6\,u^2$

Método 2 Calculando las áreas de cada figura, se nota que:

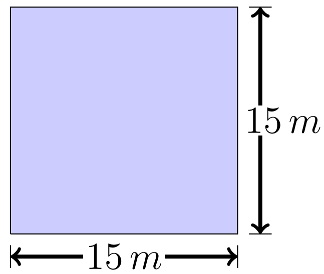
Figura	Área
Triángulo grande	$2\,u^2$
Cuadrado pequeño	$1\,u^2$
Triángulo pequeño	$0{,}5\,u^2$

El área del pájaro será: $2+1+1+0{,}5+0{,}5+0{,}5+0{,}5$, es decir $6\,u^2$.

---

13. Como para cada lado del triańgulo utiliza 6 fósforos, entonces para hacer el triángulo requiere 18 fósforos, restándole solo 20 fósforos para hacer el cuadrado, luego cada lado del cuadrado debe tener 5 fósforos, pues $4\times 5=20$.

14. Como todos los lados de un cuadrado miden igual, y el perímetro del cuadrado es $60\,m$, entonces cada lado debe medir $15\,m$.



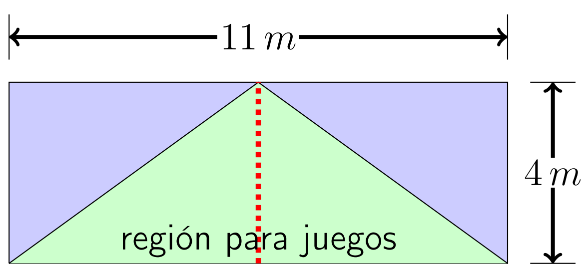
Para determinar el área realizamos el producto $15\,m \times 15\,m$.

$$\begin{array}{rrr} & 1 & 5 \\ \times & 1 & 5 \\ \hline & 7 & 5 \\ + \; 1 & 5 & \\ \hline 2 & 2 & 5 \end{array}$$

El área del cuadrado es $225\,m^2$.

---

15. Considere la siguiente figura en la cual se ha realizado un trazo auxiliar:



Como se puede observar, el área de los dos trińgulitos azules es igual al área de los triangulitos verdes, por lo tanto el área destinada para juegos es la mitad del área del rectángulo.
El área del rectángulo es $A_R = \ell \times a = 11\,m \times 4\,m = 44\,m^2$, luego el área de la región destinada a los juegos es $22\,m^2$.

16. Dado que los ángulos son adyacentes, estos son suplementarios (suman $180°$), por ello el ángulo agudo debe medir: $180° - 130° = 50°$, así la mitad de la cuarta parte, lo que equivale a la una octava parte, vale $50°/8 = 6,25°$

Capítulo 11

PROBLEMAS TEMPORALES

Soluciones en la página 89

11.1. EJERCICIOS

1. ¿Qué fracción de una hora transcurre entre la $1:56$ am de hoy y las $2:20$ am de hoy?

   a) $\frac{2}{5}\,h$

   b) $\frac{1}{5}\,h$

   c) $\frac{6}{5}\,h$

   d) $\frac{3}{5}\,h$

---

2. ¿Cuál es la razón de 20 minutos a 2 horas? Exprese esta razón como una fracción común

   a) $\dfrac{1}{3}$

   b) $\dfrac{1}{7}$

   c) $\dfrac{1}{6}$

   d) $\dfrac{1}{2}$

3. Carmen María trabajó 3 horas diarias durante 4 días y luego 2 horas diarias durante 5 días. ¿Cuántas horas trabajó, en promedio, cada día?

   a) $\frac{5}{9}$
   b) $\frac{9}{5}$
   c) $\frac{14}{9}$
   d) $\frac{22}{9}$

---

4. Karen tiene lecciones de piano dos veces a la semana, y Diego tiene lecciones de piano una vez cada semana de por medio. En un periodo dado, Karen tiene 15 lecciones más que Diego. ¿De cuántas semanas es el periodo?

   a) 5 semanas
   b) 10 semanas
   c) 15 semanas
   d) 20 semanas

11.2. SOLUCIONES

1. Método 1.

   a) De la $1:56$ am a las $2:00$ am hay 4 minutos, y de las $2:00$ am a las $2:20$ am hay 20 minutos. Luego, basta determinar que fracción de hora representan 24 minutos de 60 minutos.

   b) Simplifiquemos el cociente $\frac{24}{60}$.
   $$\frac{24}{60}=\frac{12}{30}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$$
   Así, 24 minutos corresponden a $\frac{2}{5}\,h$

   Método 2.

   a) De la $1:56$ am a las $2:00$ am hay 4 minutos, lo que representa un quinceavo de hora, y de las $2:00$ am a las $2:20$ am hay 20 minutos, lo que representa un tercio de hora. Luego, basta sumar el quinceavo con el tercio de hora.

   b) Cálculo de: $\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{3}$.
   $$\frac{1}{15}+\frac{1}{3}=\frac{1+5}{15}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$$
   Así, 24 minutos corresponden a $\dfrac{2}{5}\,h$

---

2. Basta calcular: $\dfrac{20\,min}{2\,h}=\dfrac{20\,min}{120\,min}=\dfrac{1}{6}$.
   La razón debe ser calculada con las cantidades en la misma unidad.

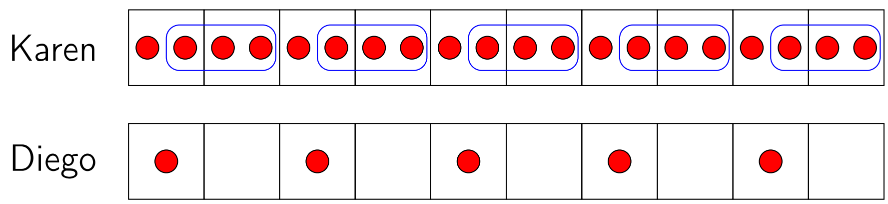
---

3. La cantidad de horas que trabajó María fue de: $\underbrace{3\times 4}_{12}+\underbrace{2\times 5}_{10}$, es decir: 22 horas. Estas 22 horas las trabajó durante 9 días, por ello, trabajó $\frac{22}{9}$ horas/día.

4. Resolvamos mediante dos métodos:

Método 1 De la lectura, se desprende que en un periodo de dos semanas completas, Karen recibe cuatro lecciones mientras que Diego solo recibe una. Es decir, cada dos semanas Karen recibe 3 lecciones más que Diego, como ella tiene 15 lecciones más y como 15 es 5 veces 3, entonces el periodo de tiempo que transcurrió para que se acumulara tal diferencia de clases tuvo que ser 5 veces dos semanas, es decir 10 semanas.

Método 2 Gráficamente se puede ver así, supongamos que cada cuadrado corresponde a una semana y los puntos a la cantidad de clases recibidas en esa semana:



De esta distribución se puede ver como en diez semanas la diferencia en la cantidad de clases recibidas es de 15 clases.

Capítulo 12

TEORÍA DE NÚMEROS

Soluciones en la página 97

12.1. EJERCICIOS

1. ¿Cuál es el mayor número menor que 60 que es el producto de tres números naturales consecutivos?

   a) 60

   b) 24

   c) 40

   d) 6

---

2. Olga examinó los números comprendidos entre -3 y 3. Luego ella multiplicó estos enteros. ¿Qué resultado obtuvo?

   a) 0

   b) 4

   c) -4

   d) 6

3. La suma de todos los dígitos de los números 34, 35 y 36 es 24 porque $(3+4)+(3+5)+(3+6)=24$. La suma de todos los dígitos de los primeros veinticinco números naturales [1] es:

   a) 215
   b) 127
   c) 195
   d) 184

---

4. Si multiplicamos un número natural por si mismo, obtendremos un cuadrado perfecto. Por lo tanto, los números $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots$ son cuadrados perfectos consecutivos. El número 1000 está entre dos cuadrados perfectos, ¿cuál es el que está más cerca de 1000?

   a) 900
   b) 1024
   c) 930
   d) 981

---

5. El promedio de 4 números enteros pares consecutivos es 21. El mayor de esos 4 números es

   a) 12
   b) 21
   c) 24
   d) 28

---

6. Ian halló un número que es igual que su recíproco, ese número puede ser

   a) 3
   b) 1
   c) 2
   d) 5

[1] NOTA: Los números naturales son $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

7. ¿Cuántos números enteros son iguales a los cuadrados de esos números enteros?

   a) ninguno

   b) uno

   c) dos

   d) diez

---

8. Un número que resulta de elevar un número natural a la segunda potencia, recibe el nombre de cuadrado. Un número que resulta de elevar un número natural a la tercera potencia, se llama cubo. Los números $2, 3, 5, 6, 7, 10, \ldots$ forman una secuencia de números naturales que no son ni cuadrados ni cubos. ¿Cuál es el 75° término de esta secuencia?

   a) 72

   b) 84

   c) 86

   d) 58

---

9. Somos dos números primos. Si nos sumas, obtendrás 78. ¿Cuáles podemos ser?

   a) 39 y 39

   b) 1 y 77

   c) 29 y 49

   d) 17 y 61

10. ¿Cuántos número primos menores que 100 tienen al 3 como dígito de las unidades?

    a) Seis

    b) Siete

    c) Ocho

    d) Nueve

---

11. La tercera parte del cuadrado del siguiente (sucesor) de la mitad de 16 es

    a) 27

    b) 63

    c) 65

    d) 82

---

12. Hay dos números naturales cuya suma es 197. ¿Cuál puede ser la diferencia de esos dos números?

    a) 0

    b) 1

    c) 2

    d) 196

---

13. Soy un número menor que 100. Si me multiplicas por la suma de mis dígitos obtendrás 70. ¿Cuál número soy?

    a) 10

    b) 14

    c) 35

    d) 70

14. ¿Entre cuántos números es divisible exactamente el número 12?

    a) Tres

    b) Cuatro

    c) Cinco

    d) Más de cinco

---

15. Un número natural tiene tres dígitos, y el producto de sus dígitos es 135. ¿Cuál es la suma de los dígitos del número?

    a) 17

    b) 12

    c) 15

    d) 9

---

16. A la décima parte del máximo común divisor de los números 20 y 70 se le resta el mínimo común múltiplo de ambos números. ¿Cuál número se obtiene?

    a) -139

    b) 139

    c) 130

    d) -130

17. Considere la siguiente información.

    I. Es un número de cuatro cifras.
    II. La diferencia entre el dígito de las unidades de millar y de las unidades es uno.
    III. El dígito de las centenas es el doble menos uno del dígito de las decenas.
    IV. La suma de los dígitos del número es 16.

    De acuerdo a ellas, ¿cuál es el número?

    a) 8327
    b) 4633
    c) 5114
    d) 3742

12.2. SOLUCIONES

1. Para resolver este ejercicio, resulta más sencillo mediante pruebas:

Prueba	Producto
$1, 2, 3$	$1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$
$2, 3, 4$	$2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
$3, 4, 5$	$3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$

Se deduce entonces que el mayor número menor que 60 que es producto de tres números naturales consecutivos es 24.

---

2. *a*) Los números enteros comprendidos entre -3 y 3 son: $-2, -1, 0, 1, 2$.

   b) Es claro que al multiplicarlos, como entre ellos se haya un 0 el resultado será 0.

---

3. Sumaremos por tramos:

   a) La suma de los dígitos del 1 al 9:
   $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = \frac{(1+9)\cdot 9}{2} = \frac{90}{2} = 45$

   b) La suma de los dígitos del 10 al 19:
   $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = \frac{(1+10)\cdot 10}{2} = \frac{110}{2} = 55$

   c) La suma de los dígitos del 20 al 25:
   $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = \frac{(2+7)\cdot 6}{2} = \frac{54}{2} = 27$

   Luego la suma total es: $45 + 55 + 27 = 127$

---

4. Calculemos una aproximación de la raíz cuadrada de 1000, mediante la siguiente fórmula:

$$\sqrt{x+h} \approx \sqrt{x} + \frac{h}{2\sqrt{x}}$$

Para ello llamemos con x a un valor próximo a 1000 del cuál sepamos su raíz cuadrada, digamos $x = 900$, pues su raíz es 30, y llamamos con h a la diferencia entre 1000 y 900, es decir $h = 100$, aplicando la fórmula se tiene:

$$\sqrt{1000} = \sqrt{900+100} \approx \sqrt{900} + \frac{100}{2\sqrt{900}} = 30 + \frac{100}{2\cdot 30} = 30 + \frac{100}{60} = 30 + \frac{5}{3} \approx 31,66$$

Este valor se redondea a 32, luego el cuadrado perfecto más próximo a 1000 es 32^2 es decir 1024.

---

5. Si el promedio de los cuatro números es 21, quiere decir que los números son:
$(21-3), (21-1), (21+1), (21+3)$ es decir: $18, 20, 22, 24$, así el mayor de ellos es 24.

---

6. El recíproco de un número n es $\frac{1}{n}$, luego solo dos números coinciden con su recíproco, estos son 1 y -1. Como dato importante, se deduce de lo anterior que el único número que no posee recíproco es el cero.

---

7. Solo dos números satisfacen esta situación, ellos son: 0 y 1.

---

8. Listemos una buena cantidad de números y anulemos los cuadrados perfectos y los cubos perfectos.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90

Hasta el número 82 se habrían eliminado 11 números, es decir, el número 82 sería el 71^o término de la secuencia, como se solicita el 75^o basta sumar 4 al número 82 para obtener que el 75^o término es el número 86.

---

9. Consideremos la siguiente criba de números primos, donde el máximo número que se muestra es 78:

	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78

Tomando como referencia los números primos señalados en los círculos, vemos que:

a) $78 = 73 + (78 - 73) = 73 + 5$

b) $78 = 71 + (78 - 71) = 71 + 7$

c) $78 = 67 + (78 - 67) = 67 + 11$

d) $78 = 61 + (78 - 61) = 61 + 17$

e) $78 = 59 + (78 - 59) = 59 + 19$

f) $78 = 53 + (78 - 53) = 53 + 25 \star$

g) $78 = 47 + (78 - 47) = 47 + 31$

h) $78 = 43 + (78 - 43) = 43 + 35 \star$

i) $78 = 41 + (78 - 41) = 41 + 37$

Se obtiene entonces que los pares de números primos cuya suma es 78 son: 73 y 5, 71 y 7, 67 y 11, 61 y 17, 59 y 19, 47 y 31 y finalmente 41 y 37. Las combinaciones que se han obtenido y que se han señalado por una estrella no deben ser consideradas pues ambos números obtenidos no son primos en forma simultánea. Luego la respuesta es: 17 y 61.

NOTA: La solución propuesta es exhaustiva, pues no hace referencia a las opciones proporcionadas, evidentemente, la forma más sencilla para resolver este ejercicio, es considerando las opciones ya que se cuenta con ellas.

---

10. $\boxed{\text{Método 1.}}$

Para resolver el ejercicio, recurrimos de nuevo a la criba de números primos:

	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100		

Es notorio que los siete números primos con la característica deseada son: 3, 13, 23, 43, 53, 73 y 83.

$\boxed{\text{Método 2.}}$

Consideremos todos los números menores a 100 que tienen por dígito de las unidades el número 3, estos son:

$$3, 13, 23, \underbrace{33}_{3\cdot 11}, 43, 53, \underbrace{63}_{3\cdot 3\cdot 7}, 73, 83, \underbrace{93}_{3\cdot 31}$$

Note que de estos, el 33, 63 y el 93 son compuestos, así los números buscados son siete en total, que son: 3, 13, 23, 43, 53, 73 y 83.

11. Veamos:

$$\underbrace{\text{La tercera parte del } \underbrace{\text{cuadrado del } \underbrace{\text{siguiente de } \underbrace{\text{la mitad de 16}}_{8}}_{8+1=9}}_{9^2=81}}_{81\div 3=27}$$

---

12. Dado que la suma de ambos números es 197, necesariamente uno debe ser par y el otro debe ser impar, pues si ambos fuesen pares la suma no puede ser impar, de igual forma si ambos son impares la suma no puede ser impar. Ahora, si un número es par y otro es impar la diferencia solo puede ser impar, por ello la única opción posible es la b). De hecho la menor diferencia posible es 1 y la mayor correspondería al mayor número impar menor a 197, es decir 195.

    La solución exhaustiva es la siguiente:

    $(99, 98), (100, 97), (101, 96), (102, 95), (103, 94), (104, 93), (105, 92),$
    $(106, 91), (107, 90), (108, 89), (109, 88), (110, 87), (111, 86), (112, 85),$
    $(113, 84), (114, 83), (115, 82), (116, 81), (117, 80), (118, 79), (119, 78),$
    $(120, 77), (121, 76), (122, 75), (123, 74), (124, 73), (125, 72), (126, 71),$
    $(127, 70), (128, 69), (129, 68), (130, 67), (131, 66), (132, 65), (133, 64),$
    $(134, 63), (135, 62), (136, 61), (137, 60), (138, 59), (139, 58), (140, 57),$
    $(141, 56), (142, 55), (143, 54), (144, 53), (145, 52), (146, 51), (147, 50),$
    $(148, 49), (149, 48), (150, 47), (151, 46), (152, 45), (153, 44), 154, 43),$
    $155, 42), (156, 41), (157, 40), (158, 39), (159, 38), (160, 37), (161, 36),$
    $(162, 35), (163, 34), (164, 33), (165, 32), (166, 31), (167, 30), (168, 29),$
    $(169, 28), (170, 27), (171, 26), (172, 25), (173, 24), (174, 23), (175, 22),$
    $(176, 21), (177, 20), (178, 19), (179, 18), (180, 17), (181, 16), (182, 15),$
    $(183, 14), (184, 13), (185, 12), (186, 11), (187, 10), (188, 9), (189, 8),$
    $(190, 7), (191, 6), (192, 5), (193, 4), (194, 3), (195, 2), (196, 1)$

    Note como todas las parejas están formadas por un número par y otro impar y las diferencias son respectivamente $1, 3, 5, 7, \ldots, 195$.

13. Realicemos la descomposición prima del número 70:

$$\begin{array}{r|l} 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Se deduce que 70 admite las siguientes descomposiciones:

a) $70 = \underbrace{1}_{1 \neq 7+0} \cdot \underbrace{70}_{\text{posible número}}$

b) $70 = \underbrace{2}_{2 \neq 3+5} \cdot \underbrace{35}_{\text{posible número}}$

c) $70 = \underbrace{5}_{5 = 1+4} \cdot \underbrace{14}_{\text{posible número}}$

d) $70 = \underbrace{7}_{7 \neq 1+0} \cdot \underbrace{10}_{\text{posible número}}$

Note que la única combinación válida es $70 = 5 \cdot 14$ pues $5 = 1 + 4$. Nuevamente, este ejercicio puede ser resuelto fácilmente si se recurre a las opciones del ejercicio.

---

14. Para resolver el ejercicio, realicemos la descomposición prima del número 12:

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Se tiene que $12 = 2^{\boxed{2}} \cdot 3^{\boxed{1}}$, para determinar la cantidad de divisores se realiza la operación: $(\boxed{2} + 1)(\boxed{1} + 1)$, es decir $3 \cdot 2$, luego la cantidad de divisores es 6. Específicamente son los números: 1, 2, 3, 4, 6 y 12.

---

15. La descomposición prima de 135 es $3 \times 3 \times 3 \times 5$, luego los dígitos del número solo pueden ser 9, 3 y 5, la suma de los dígitos es $9+3+5 = 17$.

16. Sigamos los pasos:

    a) Determinemos los valores que se mencionan en el problema para luego hacer las operaciones correspondientes:
    El máximo común divisor de los números 20 y 70.

    $$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

    Es así que 20 se descompone como: $2^2 \cdot 5^1 \cdot 7^0$ mientras que 70 se descompone como: $2^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1$. De las descomposiciones anteriores se forma una considerando los menores exponentes en cada una de las mismas, este número corresponderá al máximo común divisor:

    $$MCD = 2^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0 = 2 \cdot 5 \cdot 1 = 10$$

    b) Para determinar el mínimo común múltiplo se considera los mayores exponentes en las descomposiciones anteriores:

    $$MCM = 2^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 4 \cdot 5 \cdot 7 = 140$$

    c) La operación que nos da la respuesta es:

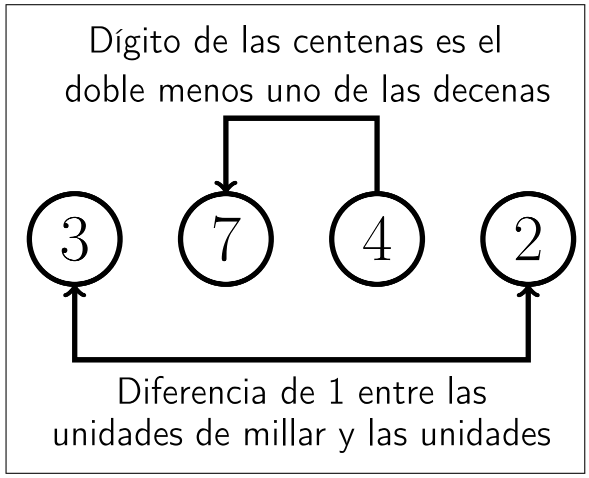
    $$\tfrac{MCD}{10} - MCM = \tfrac{10}{10} - 140 = 1 - 140 = -139$$

---

17. Analizando las condiciones del problema se concluye que los 4 números que satisfacen el enunciado son:

    3742 6325 2743 5326

    Dada la complejidad para determinar estos números de forma directa, la manera más simple para hallar la solución es ir verificando una a una las opciones que nos brindan en el ejercicio, hasta llegar a que el número que satisface las condiciones es 3742.


Dígito de las centenas es el
doble menos uno de las decenas
3
7
4
2
Diferencia de 1 entre las
unidades de millar y las unidades

Capítulo 13

PROBLEMAS DE RAZONES Y PROPORCIONES

Soluciones en la página 106

13.1. EJERCICIOS

1. Kike saca a pasear a su perro y a su gato todos los martes. El perro da 3 pasos por cada 4 pasos que da el gato. En un paso el perro recorre una distancia de 1 pie. ¿Cuántos pies avanza el gato al dar 12 pasos?

   a) 11

   b) 14

   c) 12

   d) 9

---

2. Abelardo compró 200 limones a razón de 4 limones por cada cien colones, y 200 más a razón de 5 limones por cada cien colones. Luego los vendió a razón de 5 limones por cada 140 colones.¿Cuánto ganó?

   a) 3 700 colones

   b) 2 200 colones

   c) 11 200 colones

   d) 9 000 colones

13.2. SOLUCIONES

1. Dado que el perro ahorra un paso por cada 4 que da el gato, si el gato da 12 pasos, el pero solo daría 9 pasos, es decir se recorrerían 9 pies.

---

2. Método 1.

   Suponga que x representa la cantidad que invirtió por los limones a razón de 4 por cada 100 colones.
   Suponga que y representa la cantidad que invirtió por los limones a razón de 5 por cada 100 colones.
   Suponga que z representa la cantidad que ingresó por los limones a razón de 5 por cada 140 colones.

   $$\begin{array}{ccc} 200 \to x & 200 \to y & 400 \to z \\ 4 \to 100 & 5 \to 100 & 5 \to 140 \\ x = 5000 & y = 4000 & z = 11200 \end{array}$$

   Finalmente, la ganancia es de $(\underbrace{11200}_{\text{ingreso}} - \underbrace{9000}_{\text{inversión}})$ colones , o sea 2200 colones

   Método 2.

   Para la primera compra invirtió: $200 \div 4 \cdot 100$, es decir: 5000 colones.
   Para la segunda compra invirtió: $200 \div 5 \cdot 100$, es decir: 4000 colones.
   Es así que Abelardo invirtió 9000 colones. Con los 400 limones, le alcanzan para hacer 80 "paquetes" de 5 limones cada uno, luego obtiene $80 \cdot 140$ colones, es decir: 11200 colones.
   Finalmente, la ganancia es $(11200 - 9000)$ colones , o sea 2200 colones

   Método 3.

   Compró 200 limones a 25 colones cada uno y otros 200 limones a 20 colones cada uno, es decir, los limones costaron en promedio $22{,}5$ colones y los vendió a 28 colones cada uno, así, tuvo entonces una ganancia de $5{,}5$ colones por cada limón vendido, si vendió los 400 limones, obtuvo de ganancia $400 \cdot 5{,}5$ colones, o sea $2\,200$ colones.

Capítulo 14

PROBLEMAS DE PROBABILIDAD

Soluciones en la página 108

14.1. EJERCICIOS

1. En la clase de Julia hay 36 estudiantes de los cuales 27 no usan anteojos. ¿Cuál es la probabilidad de que al pedir un alumno de esta clase se obtenga uno que use anteojos?

    a) $0{,}38$

    b) $0{,}25$

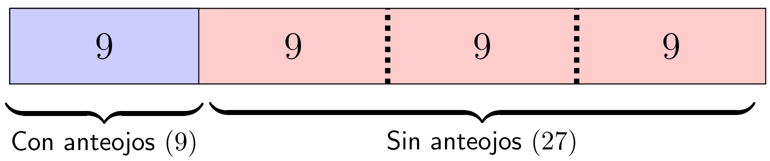
    c) $0{,}75$

    d) $0{,}42$

14.2. SOLUCIONES

1. Resolvamos de dos formas diferentes:

Método 1 La cantidad de estudiantes que usan anteojos se obtiene realizando la operación $36-27$, es decir, son 9 estudiantes los que utilizan anteojos. Representando las cantidades en una barra se obtiene:



Se observa que el $25\,\%$ de los estudiantes usa anteojos, por ello la probabilidad de seleccionar al azar a uno de los estudianetes de este grupo es $0,25$.

Método 2 Usando la fórmula de Laplace para eventos equiprobables se tiene:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}} \\ &= \frac{36-27}{36} \\ &= \frac{9}{36} \\ &= \frac{1}{4} \\ &= 0{,}25 \end{aligned}$$

Capítulo 15

PROBLEMAS PROCESO

Soluciones en la página 123

15.1. EJERCICIOS

1. Utilice su propio geoplano para construir los tres cuadriláteros que usted llamará A, B y C. Después traslade sus dibujos en la imagen siguiente usando los siguientes tres tipos de línea: continua fina, discontinua y linea gruesa. Es necesario mostrar el código.
   Los cuadriláteros A, B y C, cumplen las siguientes condiciones:
   Cuadrilátero A:

   a) Tiene exactamente dos vértices comunes con el polígono B.

   b) No tiene puntos comunes con el cuadrilátero C.

   c) Ninguno de sus puntos está en el interior del cuadrilátero B.

   d) Es un polígono cóncavo.

   e) Su área es $4\,u^2$

   Cuadrilátero B:

   a) No tiene lados verticales ni horizontales.

   b) Tiene exactamente tres puntos comunes con el cuadrilátero C.

   c) El conjunto de puntos comúnes entre los polígonos A y B es infinito.

d) Es un cuadrilátero convexo y su área es $9{,}5\,u^2$.

e) Exactamente uno de sus vértices pertenece al cuadrilátero C.

Cuadrilátero C:

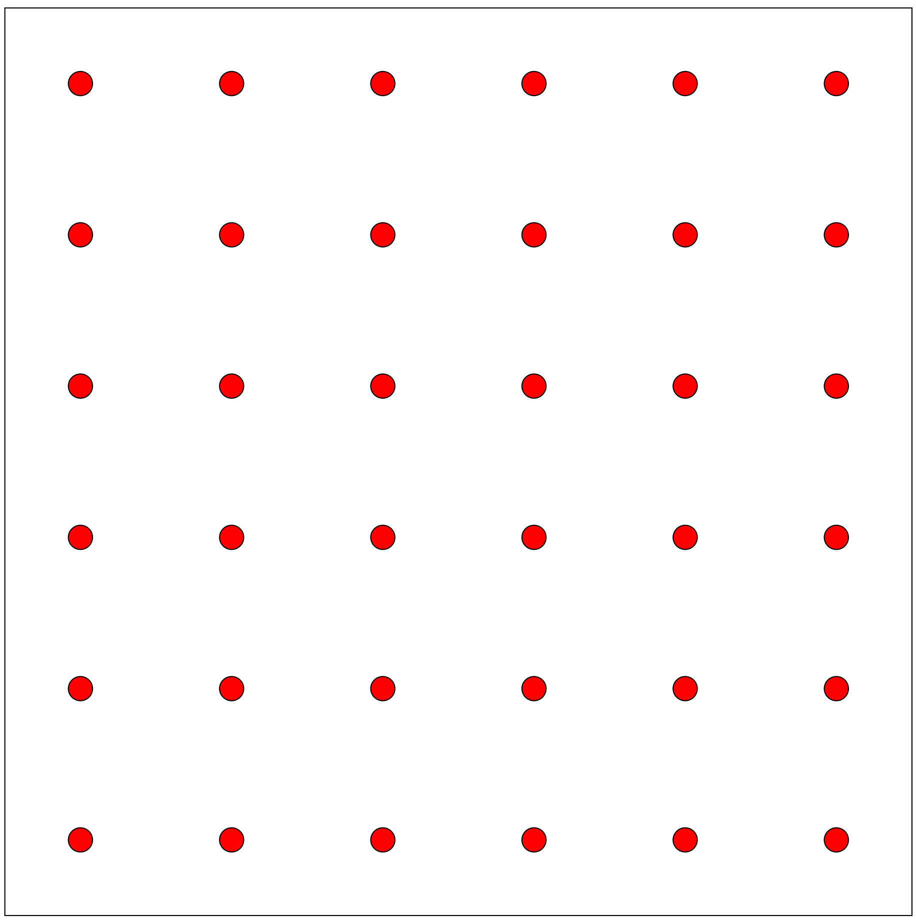
a) Nungún punto pertenece al interior del polígono A.

b) Exactamente uno de sus vértices está en el interior del polígono B.

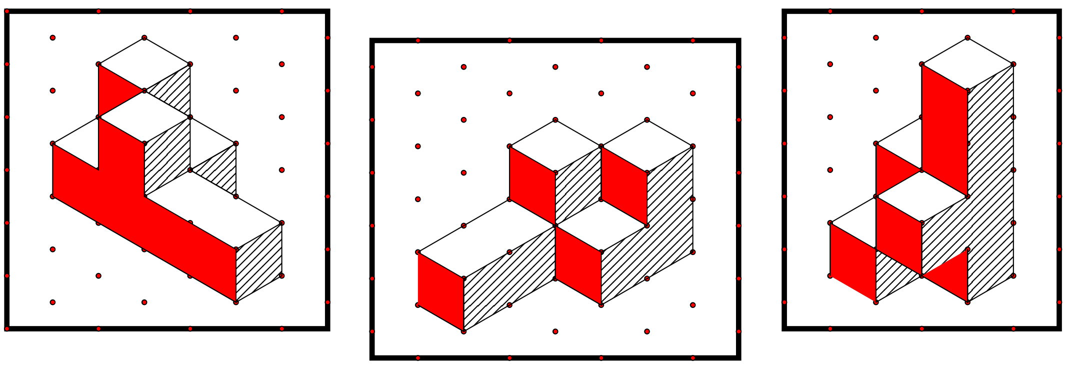
c) El área de este cuadrilátero es $6{,}5\,u^2$.

d) C es un cuadrilátero convexo.

e) Dos de sus lados no son horizontales ni verticales.

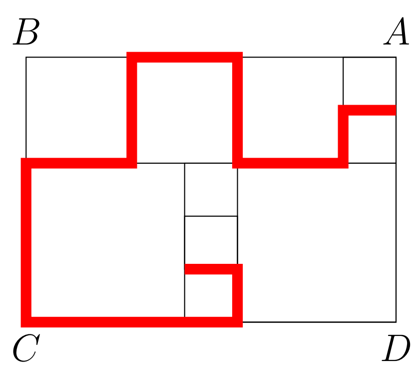


2. Jimena y Gabriel construyeron un cuerpo sólido empleando dos piezas del soma. Una de ellas es la "pieza dos". Se muestran a continuación tres vistas isométricas distintas de este cuerpo. Construya usted este sólido usando su soma, y luego, en la hoja de puntos, dibuje dos vistas, una a escala natural y otra ampliada de esta figura. No puede usar ninguna de las vistas dadas como ejemplos. Debe usar el mismo código de color, superficies blancas, rayadas y negras, como en las figuras que aparecen en esta página con el mismo patrón dado.



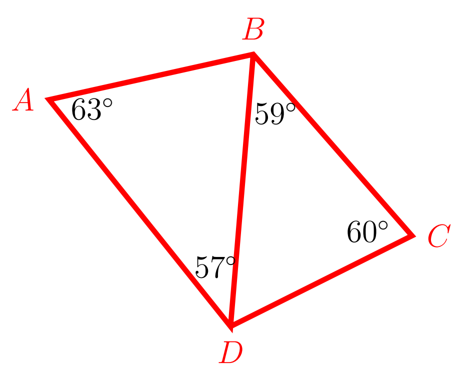
---

3. El rectángulo ABCD está formado por cuadrados, la medida del lado más pequeño es de $20\,cm$. Marianela traza una serie de segmentos más gruesos, siguiendo algunos de los lados de los cuadrados, como se aprecia en la figura. ¿Cuál es la medida de la longitud de la línea trazada por Marianela?



---

4. De acuerdo con la figura que se le proporciona a continuación y que no está construida a escala. Indique, ¿cuál de los segmentos de esta figura es el más grande?



5. A fin de año los estudiantes de la escuela de futbol votan para elegir el mejor compañero de la escuela. Este año eligieron entre cinco compañeros. Cada uno sacó 6 votos menos que el anterior y Julián fué el que obtuvo menos votos, en total 10 votos.

   $\boxed{1}$ ¿Cuántos votos obtuvo el mejor compañero?

   $\boxed{2}$ ¿Cuántos estudiantes votaron en total?

---

6. Se llaman múltiplos consecutivos de 5 a los que vienen uno después del otro en el orden natural. Como por ejemplo 15, 20 y 25 son múltiplos consecutivos de 5. Encuentra tres múltiplos consecutivos de 5 que sumados del 7380.

---

7. Una rana de ojos rojos, cae dentro de un hueco de $24\,m$ de profundidad. Para salir la rana de ojos rojos da saltos de $4\,m$ cada hora, pero se resbala $3\,m$ antes de dar el siguiente salto. Si la rana da el primer salto a las $7\,a.m.$ del día sábado. ¿Qué día y a qué hora sale del hueco la rana de ojos rojos?

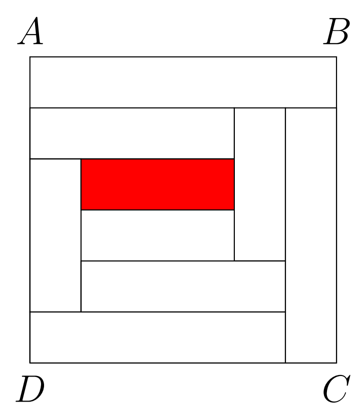
---

8. El cuadrado $ABCD$ que se muestra en la figura, está dividido en rectángulos de un mismo ancho cuya medida es $\frac{3}{4}\,m$.

   a) ¿Cuál es el largo del rectángulo destacado con color?

   b) ¿Cuál es el perímetro del rectángulo destacado con color?

   c) ¿Cuál es el área del rectángulo destacado con color?



9. Construya un pentágono $ABCDE$ en un sistema de coordenadas. Este pentágono debe tener las siguientes propiedades.

a) El punto A tiene la mayor ordenada.

b) La ordenada de B es 2 menos que la ordenada de A.

c) La ordenada de D más 3 es igual a la ordenada de C.

d) La abscisa de D, es la abscisa de E multiplicada por $\frac{-3}{2}$.

e) La abscisa y la ordenada de E son iguales.

f) La abscisa de B, es el producto de -1 y la abscisa de A.

g) El punto E tiene abscisa igual a -2.

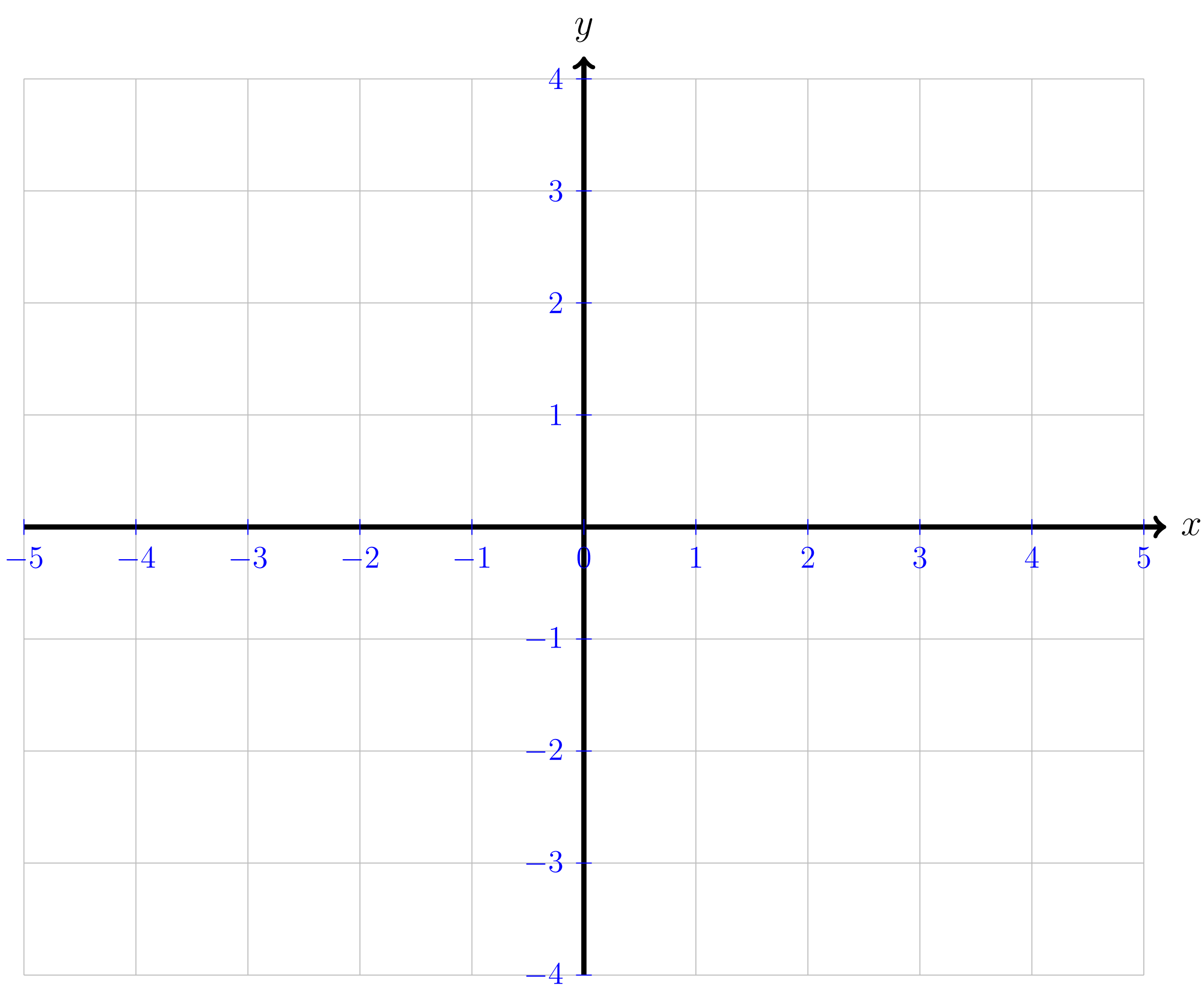
h) Si multiplicas la abscisa de A por -3 obtenemos la abscisa de D.

i) B tiene abscisa y ordenada iguales.

j) El producto de la abscisa de C, por su ordenada es 4.

k) El área del pentágono $ABCDE$ es $14\,u^2$.

l) Existe una línea recta que contiene los vértices A, B y D.



10. Utilice su geoplano para construir tres polígonos que usted llamará A, B y C. Después traslade la forma de sus figuras a la siguiente hoja usando para esto los siguientes tres tipos de línea: línea continua (———), línea discontinua (▪▪▪▪▪▪▪▪) y línea gruesa (▬▬▬). Un dibujo sin el código indicado para distinguir los polígonos tendrá cero puntos. Considere las siguientes características que distinguen los polígonos mencionados anteriormente.

Polígono A. ———

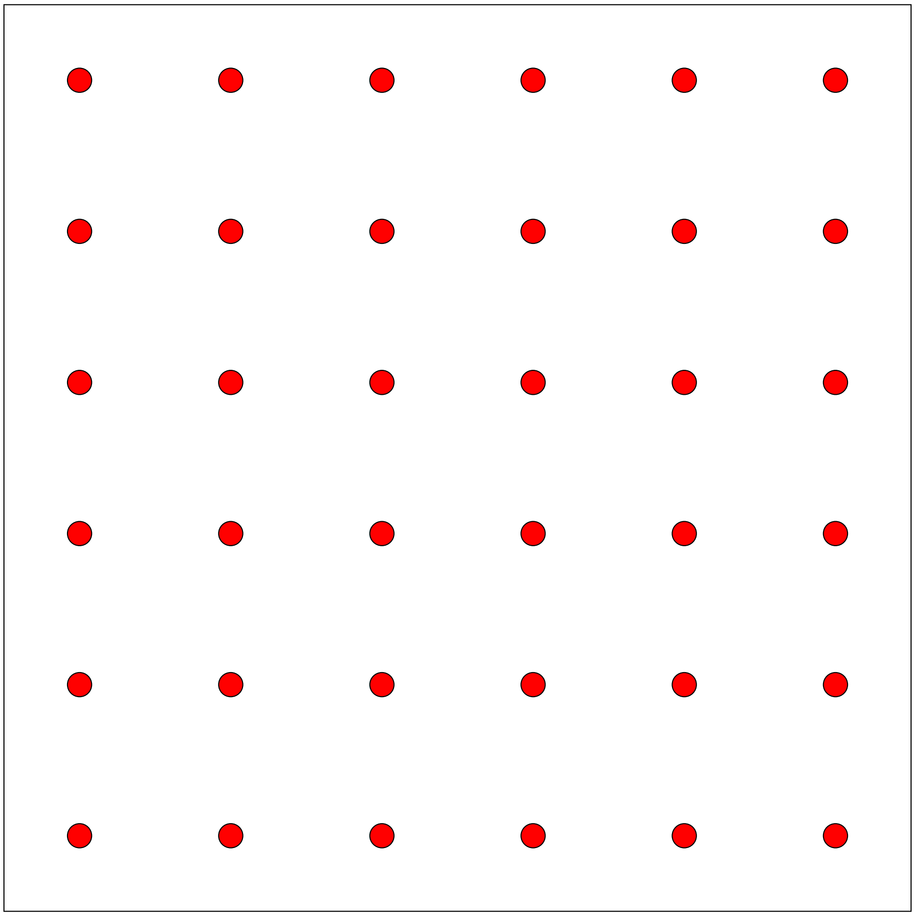
a) Tiene tres lados, uno de ellos es vertical.
b) Tiene exactamente tres puntos en común con el polígono B.
c) Su área es $10\,u^2$.
d) Tiene dos lados oblicuos.
e) Un vértice del polígono C es un punto de un lado de A.

Polígono B. ▪▪▪▪▪▪▪▪

a) Es un hexágono cóncavo.
b) Tiene exactamente dos lados verticales.
c) Parte de su interior pertenece a A.
d) Tres vértices exactamente de este polígono están en el interior de A.
e) Su área es $4\,u^2$.

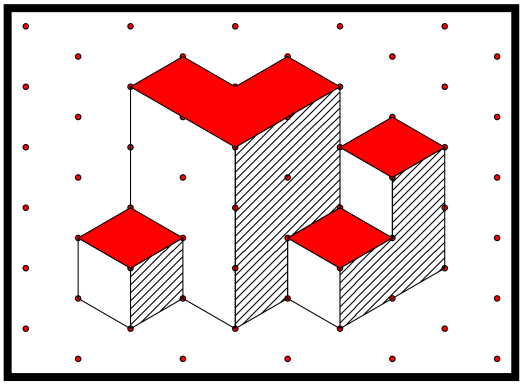
Polígono C. ▬▬▬

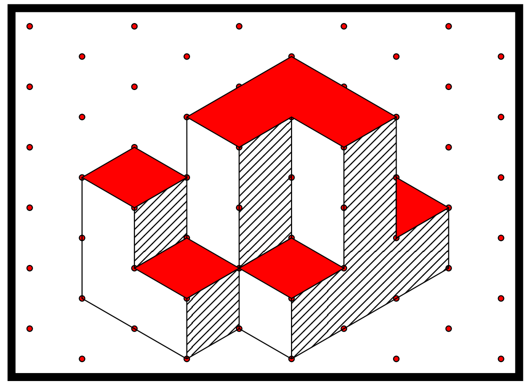
a) Es un no paralelogramo.
b) Tiene tres ángulos rectos.
c) Tiene un vértice común con el hexágono B.
d) Tiene un punto común con el triángulo A.
e) Su área es $5\,u^2$.

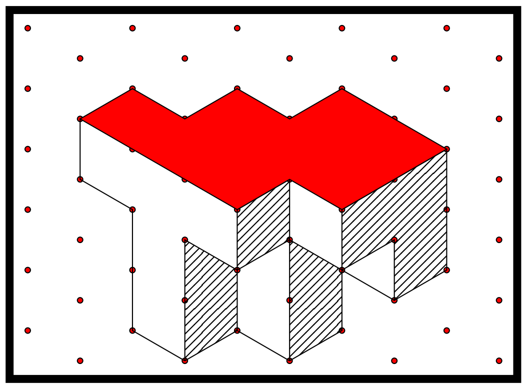


11. Hay cuatro botes en una de las orillas de un río, sus nombres son Ocho, Cuatro, Dos y Uno, porque esa es la cantidad de horas que tarda cada uno de ellos en cruzar el río. Se puede atar un bote a otro, y entonces el tiempo que tardan en cruzar es igual al más lento de los dos botes. Una sola persona debe llevar todos los botes a la otra orilla. ¿Cuál es la menor cantidad de tiempo que se necesita para completar el traslado?

12. Laura y Christopher construyeron un cuerpo sólido empleando las figuras "uno", "dos", "cuatro" y "siete" del Soma. Se muestran a continuación tres vistas isométricas distintas de este cuerpo. Construya usted este cuerpo sólido usando su Soma, y luego en la hoja de puntos, dibuje dos vistas, una a escala natural y otra ampliada de esta figura, no puede usar ninguna de las vistas dadas como ejemplos. Debe usar el mismo código de color, superficies blancas, rayadas y negras, como en las figuras que aparecen en esta página, con el mismo patrón dado.



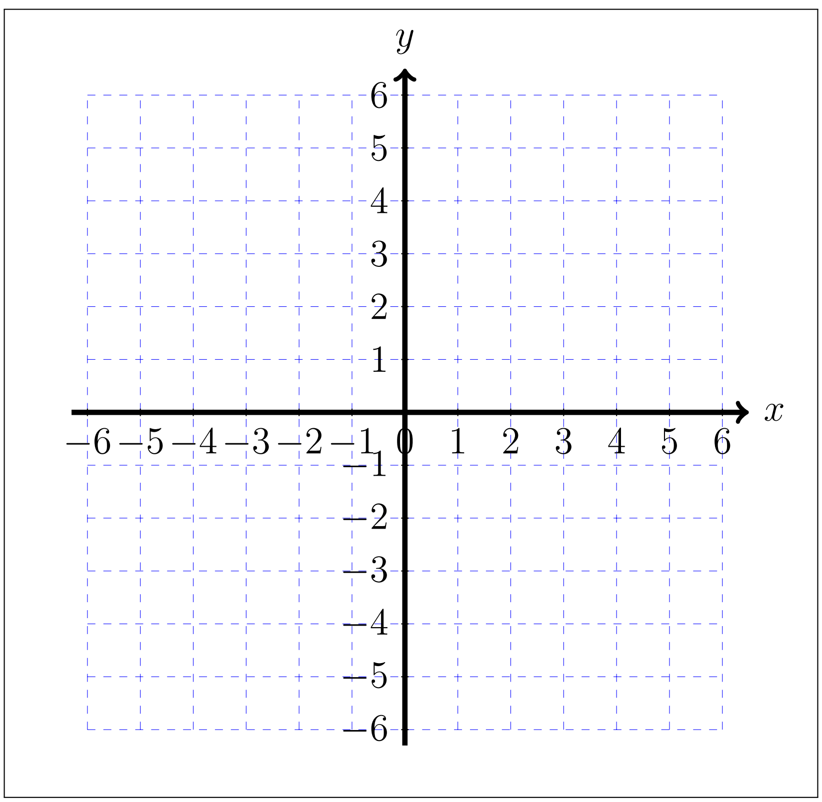




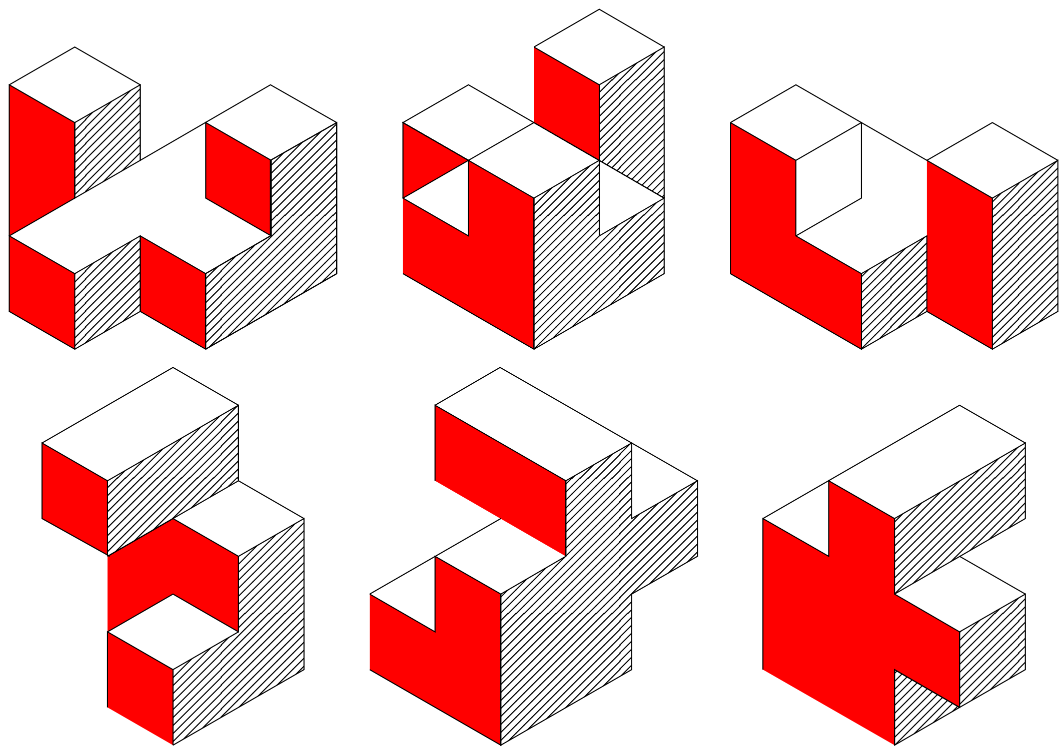
13. Karen construyó el cuadrilátero convexo $ABCD$ en el sistema de coordenadas cartesianas que vemos en la figura. Después de examinar el cuadrilátero, Karen observó que su figura tiene las siguientes propiedades.

   a) Dos de sus vértices tienen abscisas iguales.
   b) La ordenada de A es mayor que las ordenadas de los otros tres vértices.
   c) La abscisa de C es mayor que las abscisas de los demás vértices.
   d) La ordenada de uno de los cuatro vértices es 0 y su abscisa es 2.
   e) En uno de los vértices, la abscisa es el doble de la ordenada.
   f) Ningún vértice está en el exterior del rectángulo cuyos vértices tienen los pares ordenados $(2, 4)$, $(5, 4)$, $(2, -5)$ y $(5, -5)$.
   g) Solamente uno de los vértices tiene ordenada negativa.
   h) En tres de los vértices, las abscisas y las ordenadas son todas números pares.
   i) La abscisa de A es igual a la ordenada de B.
   j) Si sumamos 1 a la abscisa de B y restamos 7 a su ordenada, obtendremos las coordenadas de C.
   k) La abscisa de D es igual a la ordenada de B.
   l) El área del cuadrilátero es de $12\,u^2$.

   Construya el cuadrilátero.



14. Empleando solamente las piezas "cinco" y "siete" de su propio soma, construya usted el cuerpo sólido que se brinda en las representaciones. En esta figura aparecen seis diferentes vistas distintas de ese cuerpo. En la página siguiente, usted deberá dibujar otra vista de este sólido distinta de las que aquí se presentan. Su dibujo debe de contemplar uno sin ampliar y otro "ampliado". Deberá presentar su dibujo con el mismo "sombreado" que se usa en las seis vistas dadas, superficies blancas, superficies negras y superficies rayadas.



---

15. El cantón de Tejar tiene 3500 habitantes que pueden emitir su voto y había elecciones para designar el nuevo alcalde o alcaldesa. Del total de habitantes el $75\,\%$ emitió su sufragio. Los resultados que se obtuvieron fueron los siguientes; María Fernanda Tijerino obtuvo un $36\,\%$ de los votos, Luis Eduardo Quesada un $32\,\%$ y Silvia Catalina Pérez obtuvo un $28\,\%$. Por lo tanto, María Fernanda Tijerino ganó las elecciones. Ahora usted debe ayudar al Tribunal que dirige las votaciones, contestando lo siguiente:

   a) ¿Cuántas personas votaron por cada uno de los aspirantes a alcalde?
   b) ¿De las personas que hicieron valer su voto cuantos dejaron su voto

en blanco o lo anularon y que porcentaje representa de los votantes?

c) ¿Cuántos habitantes no ejercieron su derecho de votar?

---

16. El promedio o media aritmética de ocho números es 13. Si se suprimen tres de esos números, la media aritmética de los números restantes es 16. ¿Cuál es la suma de los tres números suprimidos?

---

17. Utilice su propio geoplano para construir tres polígonos. Después traslade la forma de sus figuras a la siguiente hoja usando para esto los siguientes tres tipos de línea: línea continua (______), línea discontinua (▪▪▪▪▪▪▪▪) y línea gruesa (▬▬▬). Un dibujo sin el código indicado para distinguir los polígonos tendrá cero puntos. Considere las siguientes características que distinguen los polígonos mencionados anteriormente.
    Construya en su geoplano: un triángulo, un cuadrado y un octógono irregular que cumplan las siguientes condiciones:

    a) Cuatro de los lados del octógono irregular son horizontales.

    b) Ninguno de los lados del triángulo es horizontal.

    c) El octógono y el triángulo tienen exactamente tres vértices comunes.

    d) El cuadrado y el triángulo tiene exactamente un vértice común.

    e) Existen puntos en el interior del octógono irregular que pertenecen al interior del triángulo.

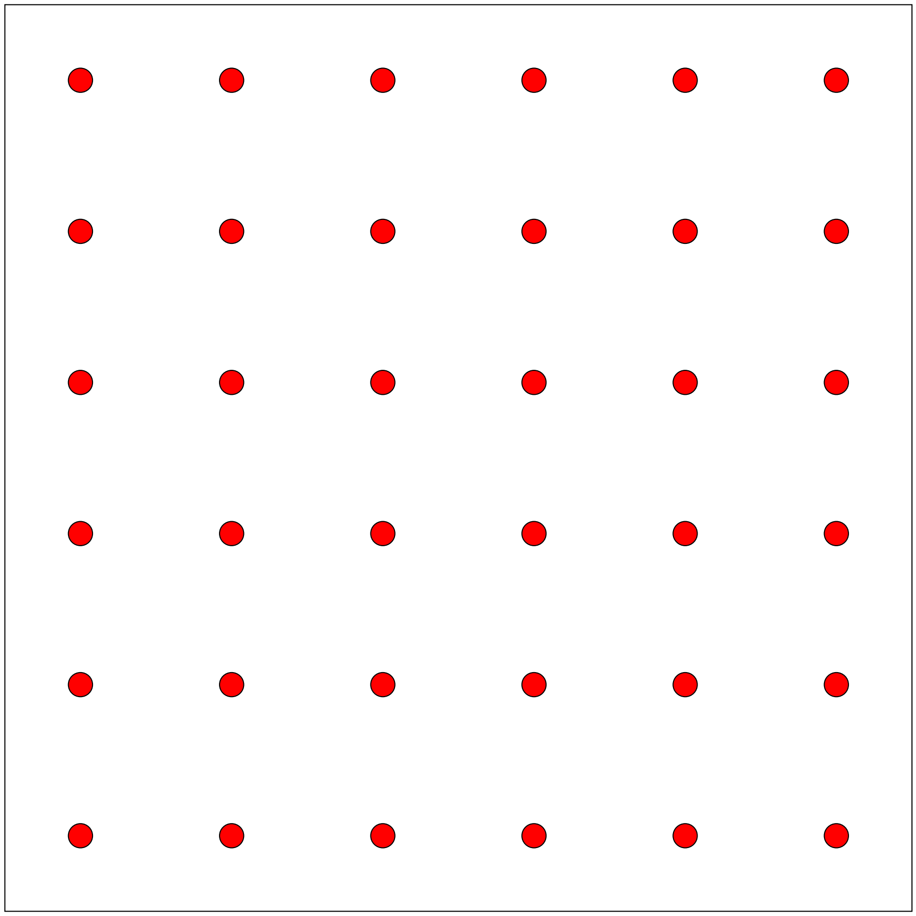
    f) No existen puntos del interior del cuadrado que pertenezcan al exterior del octógono irregular.

    g) Todos los vértices del cuadrado pertenecen al octógono irregular.

    h) El interior del cuadrado y el interior del triángulo, no tienen puntos comunes.

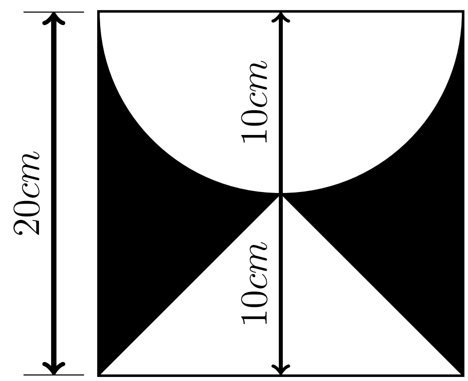
    i) El octógono irregular y el triángulo, tienen exactamente cuatro puntos comunes.

    j) En el cuadrado, al menos uno de sus lados es vertical y al menos uno de sus lados es horizontal.



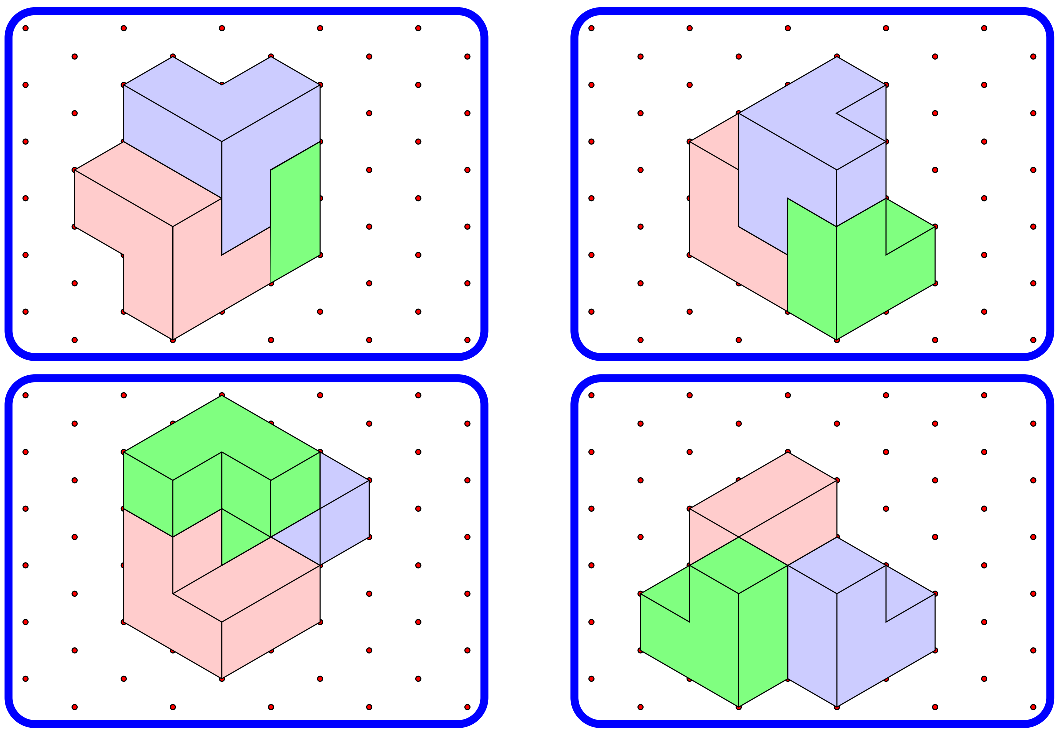
18. En la ciudad de Cartago hay un restaurante que tiene como nombre Cantarana y tiene un total de 60 mesas, el pasado 15 de setiembre para celebrar la fiesta patria de la independencia, el restaurante estuvo totalmente lleno. Este restaurante cuenta con mesas para que exactamente coman 2 personas y en otras exactamente 5 personas. Ese 15 de setiembre en mención habían 162 personas y todas las mesas del restaurante Cantarana estaban llenas. ¿Cuántas mesas para dos y cinco personas tiene el restaurante Cantarana?

19. La figura muestra un cuadrado cuyos lados miden $20cm$. Dentro de él esta trazada una semicircunferencia cuyo diámetro tiene la misma longitud que el lado del cuadrado. Debajo de la circunferencia se ve un triángulo isósceles cuyo vértice coincide con el centro del cuadrado. ¿Calcule el porcentaje del área del cuadrado que está destacado con color negro?



20. Felipe tenía en su cuenta corriente $2\,750\,000$ colones, el día viernes. El sábado se presentó al banco a hacer una transacción y descubrió que un tío le había dejado una herencia de ocho millones de colones, pero hasta el jueves de la semana siguiente podía hacer efectiva su herencia. Entonces el jueves llega a una sucursal del banco donde tenía su dinero y cancela una deuda que tenía, dando $\frac{9}{20}$ del dinero de la herencia que le dejó su tío. Al día siguiente en la mañana y, conociendo que su hermano Marcelo tenía una deuda de $300\,000$ colones, le regala $\frac{1}{3}$ del dinero que le quedaba de la herencia de su tío, para que cancelara la deuda que tenía.
¿Cuánto dinero de la herencia le quedaba a Felipe el viernes en la tarde?

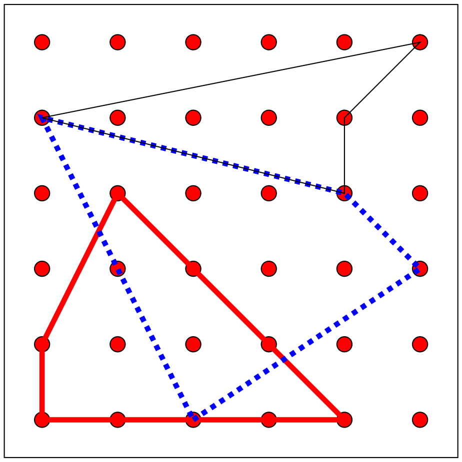
21. Jimena y Sebastián construyeron un cuerpo sólido empleando las piezas "cinco", "seis" y "siete" del soma de Piet Hein. Se muestran a continuación cuatro vistas isométricas distintas de este cuerpo. Construya usted este cuerpo sólido usando su soma, y luego en la hoja de puntos, dibuje dos vistas, una en escala natural y otra en escala ampliada de esta figura. No puede usar ninguna de las vistas dadas como ejemplos. Presente su dibujo con superficies con trama de líneas, sólido negro y sólido blanco.



Código: La pieza "7" se representa en color azul pálido, la "6" en color verde claro y la "5" en color rosado.

15.2. SOLUCIONES

1. Una posible solución es:



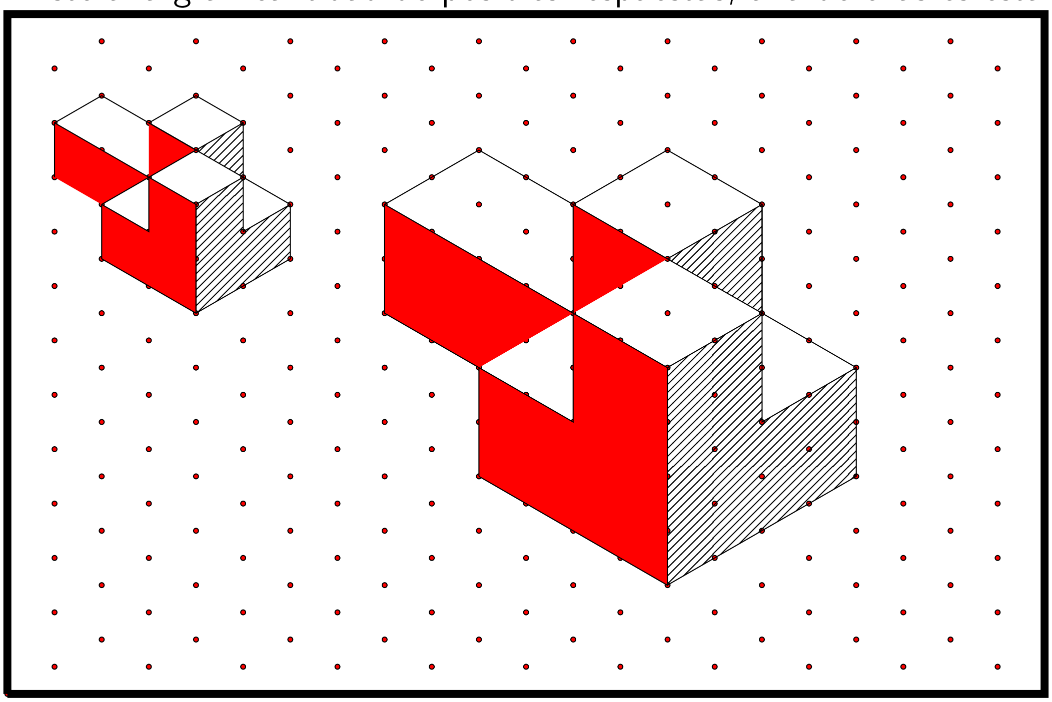
Código:

a) $\square A$:
línea continua fina.

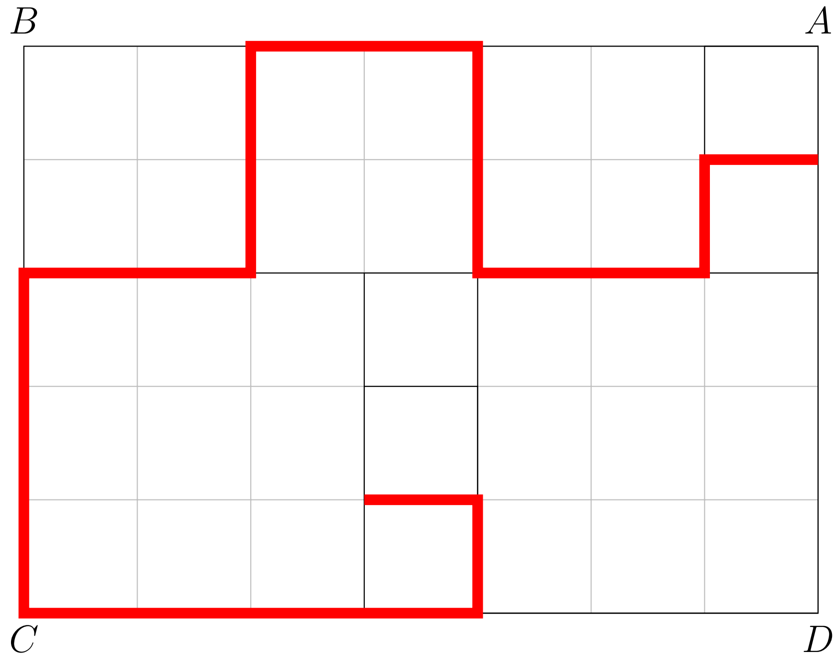
b) $\square B$:
línea discontinua.

c) $\square C$:
línea continua gruesa.

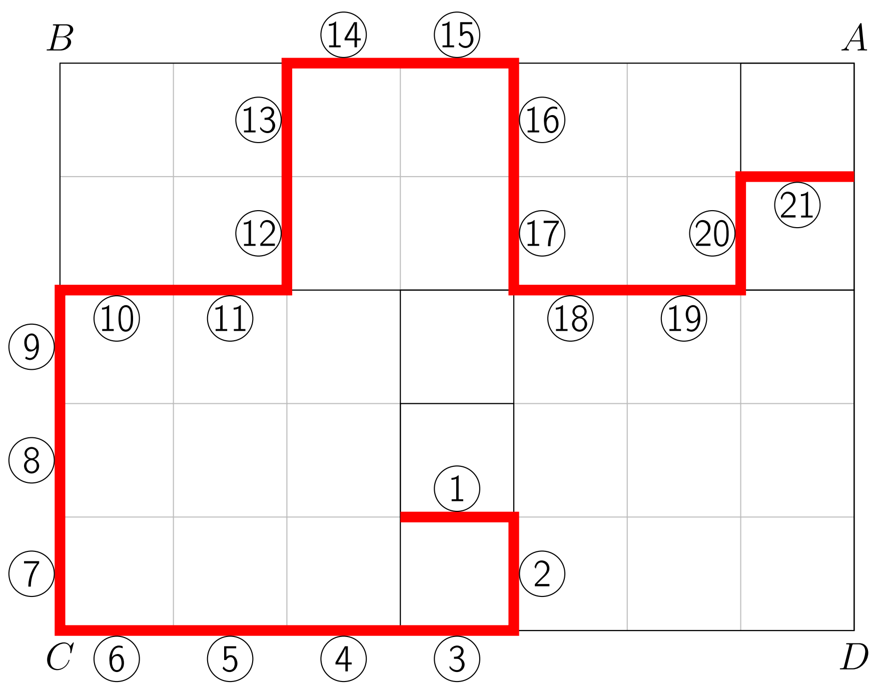
2. Existe una gran cantidad de posibles respuestas, una de ellas es esta:



3. *a*) Una manera de resolver el ejercicio es dividir la figura mediante una cuadrícula como la que se muestra:



b) Se realiza el siguiente conteo de pequeños segmentos:



Finalmente, la longitud de la línea trazada es: $L = 21 \cdot 20\,cm = 420\,cm$

4. $\boxed{1}$ Cálculo de la $m\angle ABD$: $m\angle ABD = 180° - 63° - 57° = 60°$

   $\boxed{2}$ En el $\triangle ABD$, el ángulo de mayor medida es el $\angle BAD$, luego, de los lados de este triángulo el mayor es $\overline{BD}$. (lado opuesto al ángulo mayor)

   $\boxed{3}$ Basta definir cuál es el lado mayor entre los lados del $\triangle BDC$, es decir, entre $\overline{BD}$, $\overline{DC}$ y $\overline{BC}$.

   $\boxed{4}$ Cálculo de la $m\angle BDC$: $m\angle BDC = 180° - 59° - 60° = 61°$

   $\boxed{5}$ Es así que entre los lados del $\triangle BDC$, el mayor es $\overline{BC}$. (lado opuesto al ángulo mayor)

   Respuesta: El lado de mayor longitud es $\overline{BC}$

---

5. $\boxed{1}$ El mejor compañero obtuvo:

$$10 + 6 + 6 + 6 + 6 = 10 + 4 \cdot 6 = 10 + 24 = 34 \text{ votos}$$

   $\boxed{2}$ Votaron en total:

$$10 + \underbrace{16}_{10+1\cdot 6} + \underbrace{22}_{10+2\cdot 6} + \underbrace{28}_{10+3\cdot 6} + \underbrace{34}_{10+4\cdot 6} = 5 \cdot 22 = 110 \quad \text{compañeros}$$

---

6. Si a, b y c son múltiplos consecutivos de 5, entonces $a = b-5$ y $c = b+5$, luego la suma de estos es $a + b + c = b - 5 + b + b + 5 = 3b$. Luego:

$$\begin{array}{r|l} 7380 & 3 \\ \cline{2-2} 13 & 2460 \\ 18 & \\ 0 & \end{array}$$

   Así $a = 2460 - 5 = 2455$, $b = 2460$, $c = 2460 + 5 = 2465$ son los múltiplos buscados.

   Respuesta: Los números buscados son: 2455, 2460 y 2465.

7. Como en cada salto la rana avanza $4\,m$ pero resbala $3\,m$, el avance efectivo es de $1\,m$ por cada salto.

   Es así que a las $7\,a.m.$, cuando da el primer salto, avanza de forma efectiva $1\,m$, para las $8\,a.m.$ habrá dado el segundo salto y su avance efectivo será de $2\,m$... y así seguidamente como se muestra en la tabla:

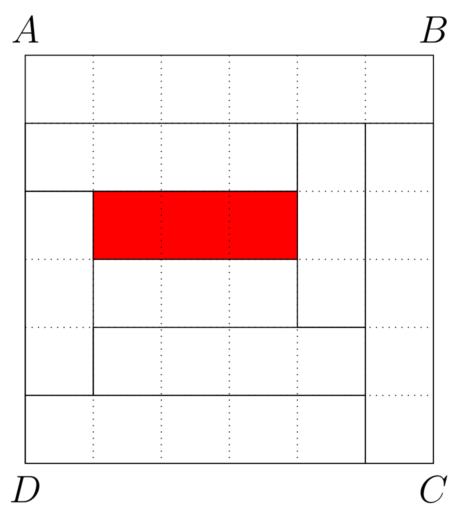
hora	7 am	8 am	$\cdots$	12 md	1 pm	$\cdots$	12 mn	1 am	2 am	3 am
dist.	1 m	2 m	$\cdots$	6 m	7 m	$\cdots$	18 m	19 m	20 m	24 m

   Nótese que en el último salto, el que da a las $3\,am$ avanza de forma efectiva los $4\,m$, es decir, ya no resbala, pues la rana en ese momento se halla en el borde del hueco y ya puede salir.

   Respuesta: La rana sale a las $3\,a.m.$ del día domingo.

---

8. Dividamos la figura como sigue:



   De lo anterior, se deduce que

   a) El largo del rectángulo destacado con color corresponde a: $3 \cdot \frac{3}{4}\,m = \frac{9}{4}\,m$

   b) El perímetro del rectángulo destacado con color corresponde a: $8 \cdot \frac{3}{4}\,m = \frac{24}{4}\,m = 6\,m$

   c) El área del rectángulo destacado con color corresponde a:
   $3 \cdot (\frac{3}{4}\,m)^2 = 3 \cdot \frac{9}{16}\,m^2 = \frac{27}{16}\,m^2$

9. Simplifiquemos la información anterior de esta forma:

a) $max\{y_A, y_B, y_C, y_D, y_E\} = y_A$

b) $y_B + 2 = y_A$

c) $y_D + 3 = y_C$

d) $x_D = x_E \cdot \frac{-3}{2}$

e) $x_E = y_E$

f) $x_B = -1 \cdot x_A$

g) $x_E = -2$

h) $x_A \cdot -3 = x_D$

i) $x_B = y_B$

j) $x_C \cdot y_C = 4$

k) $(ABCDE) = 14\, u^2$.

l) $A - B - D$

Análisis:

$\boxed{\text{A.}}$ De g) en e): $y_E = -2$, así $\boxed{\boxed{E(-2,-2)}}$

$\boxed{\text{B.}}$ De g) en d): $x_D = -2 \cdot \frac{-3}{2} = 3$, así $\boxed{x_D = 3}$

$\boxed{\text{C.}}$ De $\boxed{\text{B.}}$ en h) se desprende que: $x_A \cdot -3 = 3 \Rightarrow x_A = -1$, así $\boxed{x_A = -1}$

$\boxed{\text{D.}}$ De $\boxed{\text{C.}}$ en f), se tiene que $\boxed{x_B = 1}$

$\boxed{\text{E.}}$ De $\boxed{\text{D.}}$ en i) se tiene que $\boxed{y_B = 1}$, así $\boxed{\boxed{B(1,1)}}$

$\boxed{\text{F.}}$ De $\boxed{\text{E.}}$ en b) se tiene que $\boxed{y_A = 3}$

$\boxed{\text{G.}}$ De $\boxed{\text{F.}}$ y $\boxed{\text{C.}}$ se desprende que $\boxed{\boxed{A(-1,3)}}$

$\boxed{\text{H.}}$ De $\boxed{\text{G.}}$, $\boxed{\text{E.}}$, $\boxed{\text{B.}}$ y l) se desprende que $\boxed{y_D = -1}$

$\boxed{\text{I.}}$ De $\boxed{\text{B.}}$, $\boxed{\text{H.}}$, se tiene que $\boxed{\boxed{D(3,-1)}}$

$\boxed{\text{J.}}$ De $\boxed{\text{H.}}$ en c), se tiene que $\boxed{y_C = 2}$

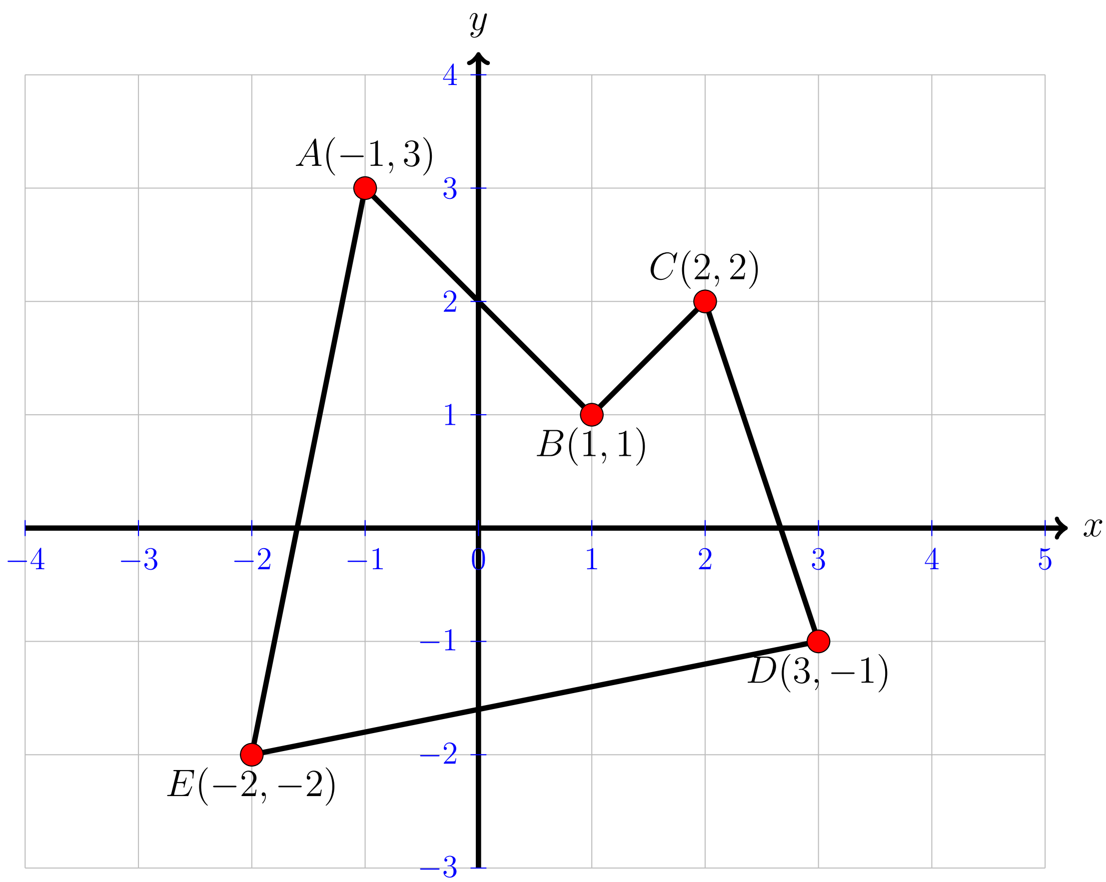
$\boxed{\text{K.}}$ De $\boxed{\text{J.}}$ en j) se concluye que $\boxed{x_C = 2}$

$\boxed{\text{L.}}$ De $\boxed{\text{I.}}$ y $\boxed{\text{K.}}$ se tiene que $\boxed{\boxed{C(2,2)}}$

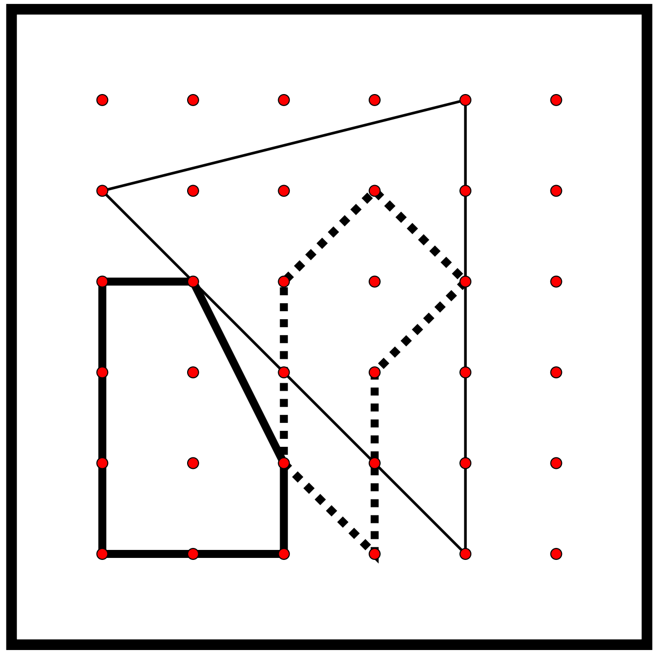
Nótese que a) y k) resultan ser informaciones redundantes, pues se pueden obtener las coordenadas de los puntos sin recurrir al uso de ellas.

En resumen se tiene que:

	x	y
A	-1	3
B	1	1
C	2	2
D	3	-1
E	-2	-2



10. Una posible solución es la siguiente:



---

11. a) Lo primero que se hará será pasar los botes que requieren menor tiempo para ir y venir, estos son el Uno y el Dos. De esta forma tendremos disponibilidad de los que requieren menos tiempo en sus viajes en la otra orilla.

    b) Llegando a la otra orilla dejamos el Dos y regresamos con el Uno.

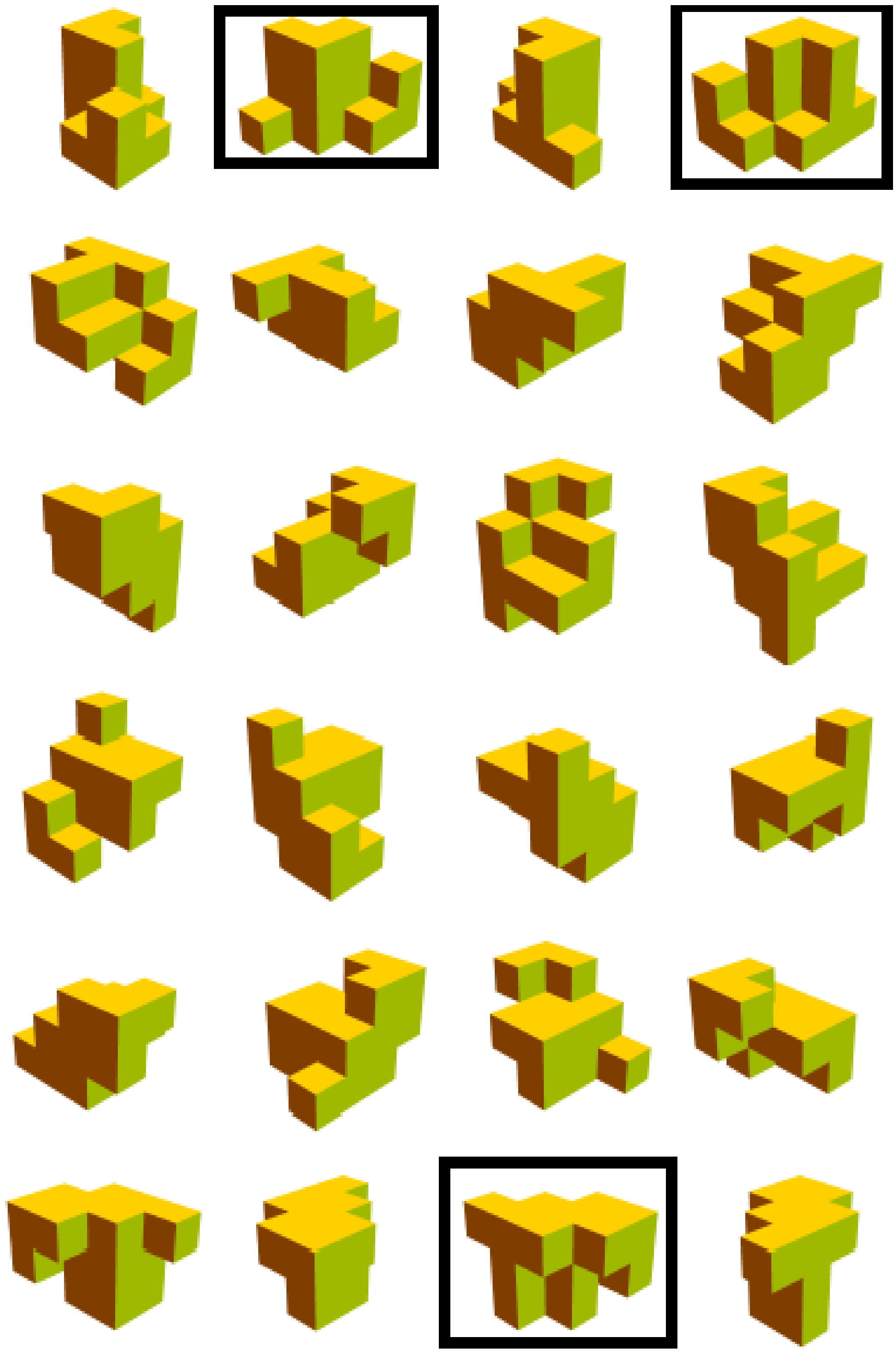
    c) En este momento en la orilla de salida están los botes Ocho, Cuatro y Uno mientras que en la otra orilla está el bote Dos. Hasta aquí se requirieron 3 horas.

    d) Pasaremos ahora a los botes que demoran más juntos, estos son el Cuatro y el Ocho, esto sumará 8 horas al tiempo, es decir, al pasar estos dos barcos se tiene un tiempo de 11 horas. En este momento en la orilla de salida está el bote Uno, mientras de en la orilla de llegada están los botes Dos, Cuatro y Ocho.

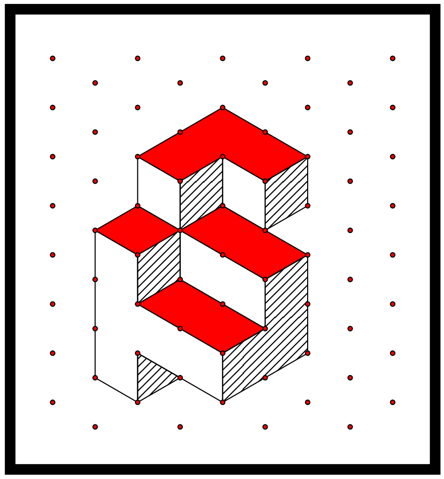
    e) Basta ir por el bote Uno, para ello se usa el bote Dos, lo cual nos requerirá 4 horas más para hacer todo el movimiento de ida y vuelta.

Respuesta: En total se requieren como mínimo 15 horas para pasar todos los botes.

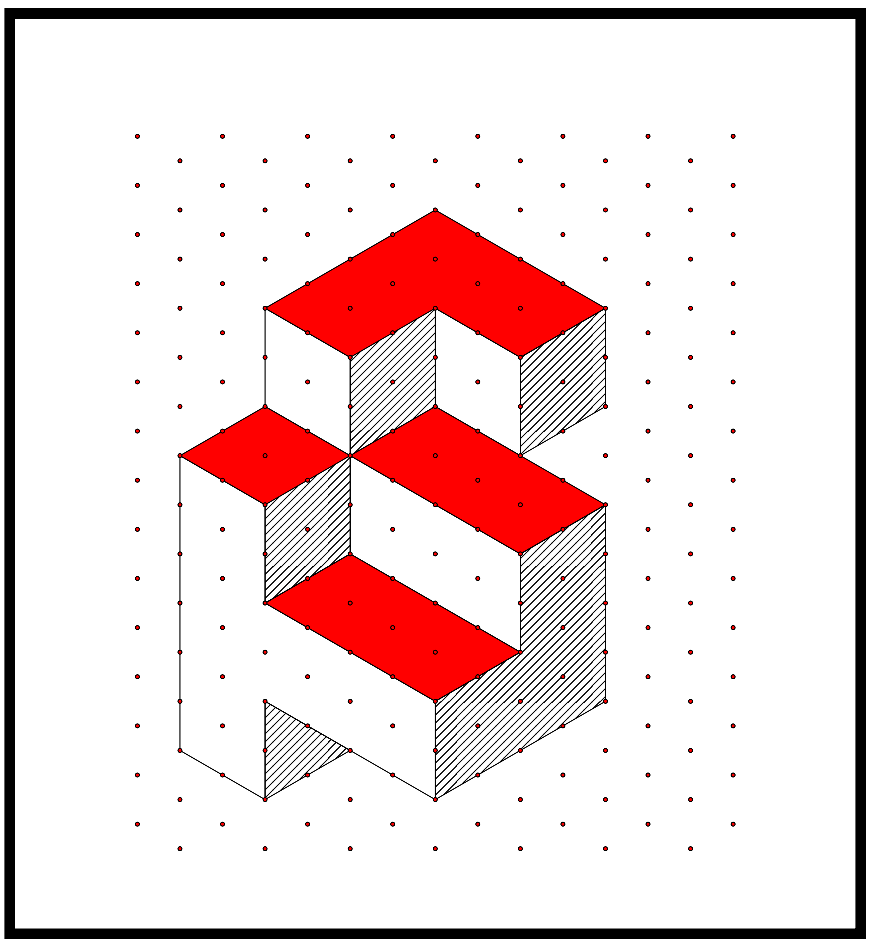
12. Para resolver este ejercicio de forma efectiva, el estudiante debe hacer una vista isométrica en tamaño natural y otra ampliada de alguna de las siguientes imágenes, con excepción de las que se hallan en los recuadros.



Solución: Una posible solución es la siguiente:

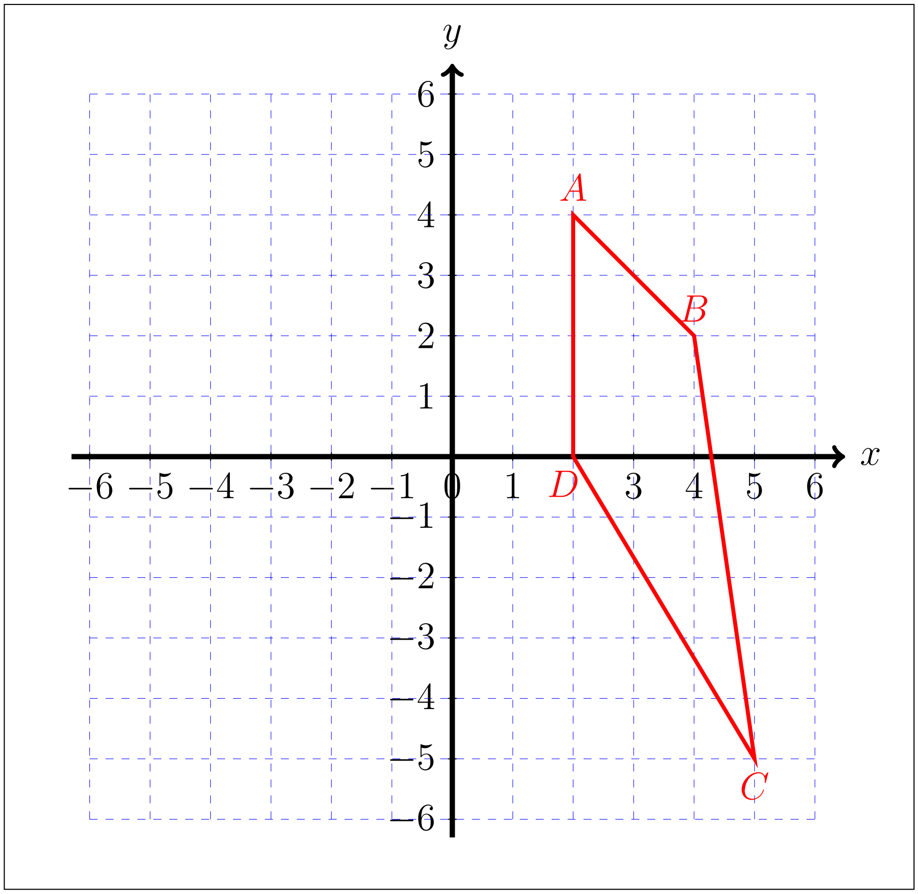


VISTA ISOMÉTRICA EN ESCALA NATURAL

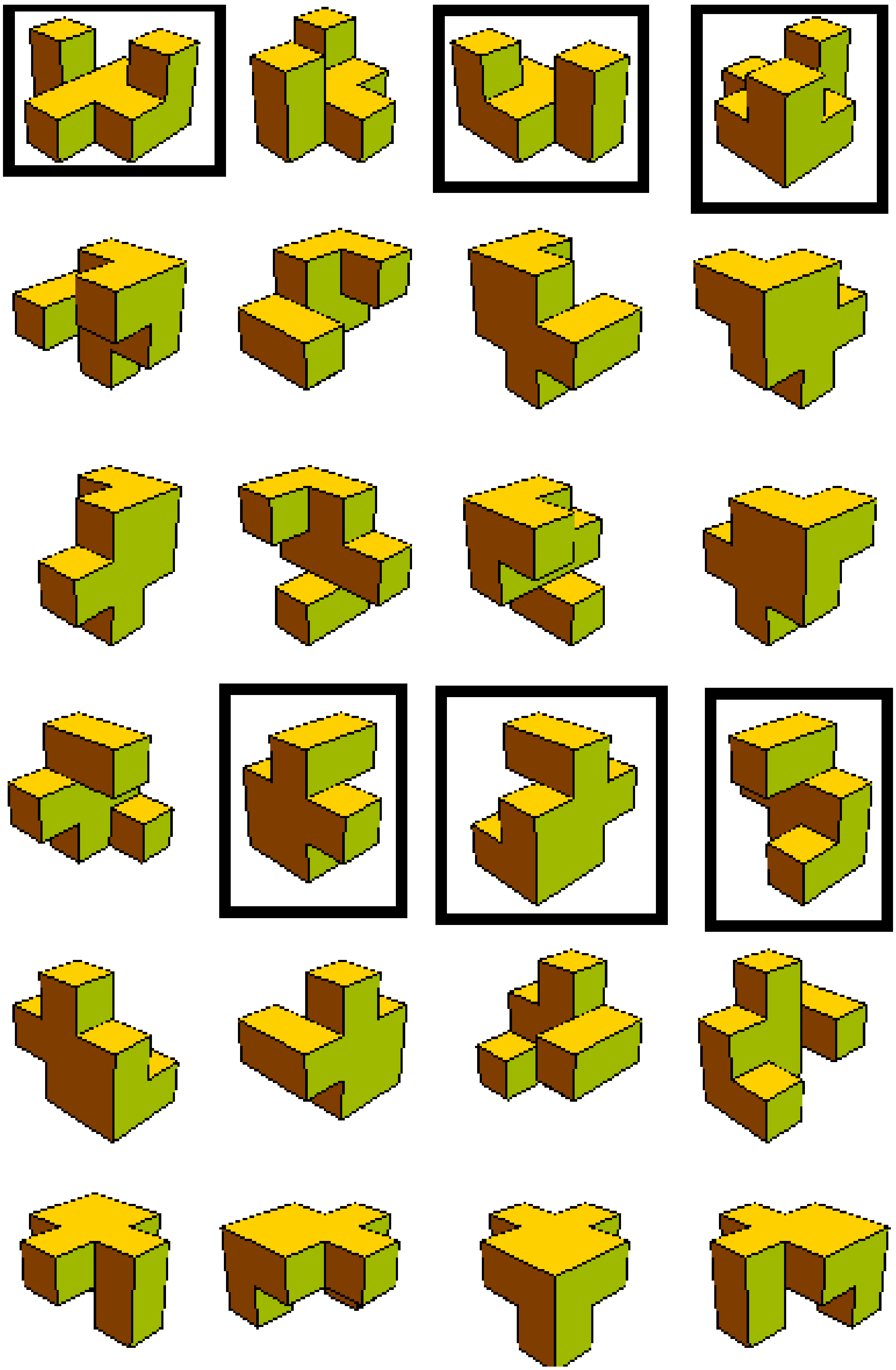


VISTA ISOMÉTRICA EN ESCALA AMPLIADA

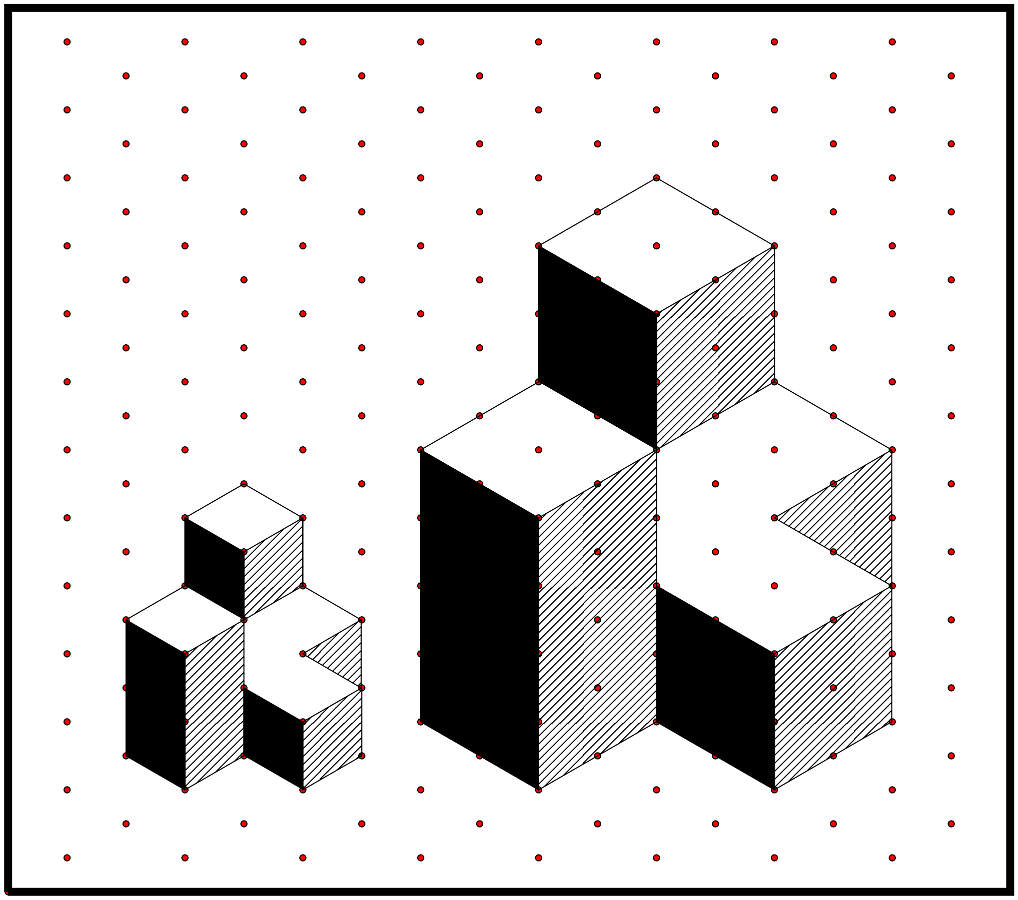
13. El cuadrilátero queda como en la figura:



14. Se muestran las posibles 24 vistas que pueden presentarse, las que no pueden ser consideradas son las 6 que aparecen encerradas en recuadros pues estas han sido dadas previamente.



Existen 18 posibles respuestas, una de ellas es esta:



---

15. *a*) La cantidad de habitantes que emitió su voto fue el $75\,\%$ de 3500 habitantes, para determinar este valor, se procede a realizar el producto $3500 \times 0{,}75$, se obtiene así: 2625 habitantes.

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & 3 & 5 & 0 & 0 \\
\times & & & 0, & 7 & 5 \\
\hline
 & 1 & 7 & 5 & 0 & 0 \\
2 & 4 & 5 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & \\
\hline
2 & 6 & 2 & 5, & 0 & 0
\end{array}$$

b) De forma similar se calcula ahora el $36\,\%$ de 2625, que son los votos obtenidos por María Fernanda Tijerino, estos son 945 votos.

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & 2 & 6 & 2 & 5 \\
\times & & & 0, & 3 & 6 \\
\hline
 & 1 & 5 & 7 & 5 & 0 \\
 & 7 & 8 & 7 & 5 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & \\
\hline
0 & 9 & 4 & 5, & 0 & 0
\end{array}$$

c) Se calcula ahora el $32\,\%$ de 2625, que son los votos obtenidos por Luis Eduardo Quesada, estos son 840 votos.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & 2 & 6 & 2 & 5 \\
\times & & & 0, & 3 & 2 \\
\hline
 & & 5 & 2 & 5 & 0 \\
 & 7 & 8 & 7 & 5 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & \\
\hline
0 & 8 & 4 & 0, & 0 & 0
\end{array}$$

d) Finalmente, se calcula ahora el $28\,\%$ de 2625, que son los votos obtenidos por Silvia Catalina Pérez, estos son 735 votos.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & 2 & 6 & 2 & 5 \\
\times & & & 0, & 2 & 8 \\
\hline
 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 5 & 2 & 5 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & \\
\hline
0 & 7 & 3 & 5, & 0 & 0
\end{array}$$

e) Dado que: $36\,\% + 32\,\% + 28\,\% = 96\,\%$, entonces el $4\,\%$ de los votos recibidos no fueron asignados a ningún candidato, esto por estar en blanco o bien nulos. Estos representan 105 personas.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & 2 & 6 & 2 & 5 \\
\times & & & 0, & 0 & 4 \\
\hline
 & 1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & \\
\hline
0 & 1 & 0 & 5, & 0 & 0
\end{array}$$

f) La cantidad de personas que decidieron no votar son 875 personas, pues esta cantidad equivale al $25\,\%$ de 3500.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & 3 & 5 & 0 & 0 \\
\times & & & 0, & 2 & 5 \\
\hline
 & 1 & 7 & 5 & 0 & 0 \\
 & 7 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & \\
\hline
0 & 8 & 7 & 5, & 0 & 0
\end{array}$$

Respuesta: María Fernanda obtuvo 945 votos, Luis Eduardo obtuvo 840 votos, mientras que Silvia Catalina obtuvo 735 votos. El $4\,\%$ dejaron su voto nulo o en blanco, lo que equivale a 105 personas. Finalmente, la cantidad de personas que decidieron no votar son 875.

16. Resolvamos de dos formas diferentes:

Método 1 Probando cantidades.

a) Suprimidos 3 de los números, dado que el promedio de los 5 números restantes debe ser 16, supongamos que estos 5 números son: $16, 16, 16, 16, 16$

b) Para que el promedio de los 8 números originales sea 13, entonces los tres siguientes números se pueden suponer como 13 cada uno de ellos, dándoles una compensación por el exceso de 3 unidades sobre 13 de los primeros 5 números.

c) Los últimos tres números deben sumar: $3 \times 13 - 5 \times 3 = 39 - 15 = 24$

Esquemáticamente se puede observar de la siguiente forma:

$$\frac{\overset{+3}{16}+\overset{+3}{16}+\overset{+3}{16}+\overset{+3}{16}+\overset{+3}{16}+\overbrace{13+13+13}^{-3-3-3-3-3}}{8}=13$$

Método 2 Solución algebraica.

a) Supóngase que los 8 números son $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ y a_8, dado que el promedio de estos números es 13, se tiene entonces que:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8}{8} = 13 \Rightarrow$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 13 \cdot 8 = 104$$

b) Supongamos que se suprimen los números a_6, a_7 y a_8, luego:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5} = 16 \Rightarrow a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 = 16 \cdot 5 = 80$$

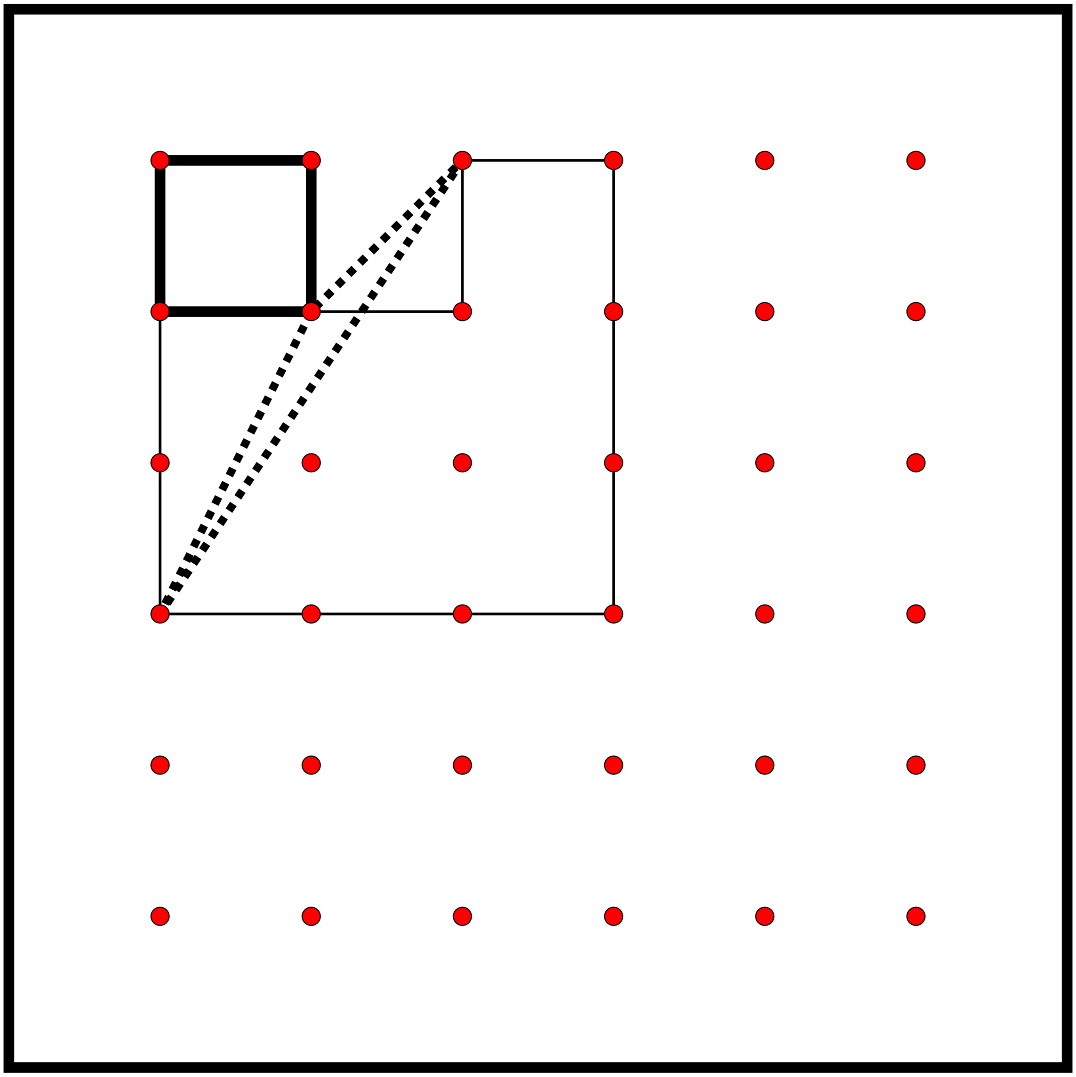
En resumen:

$$\boxed{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5} + \boxed{a_6 + a_7 + a_8} = 104$$

$$\boxed{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5} = 80$$

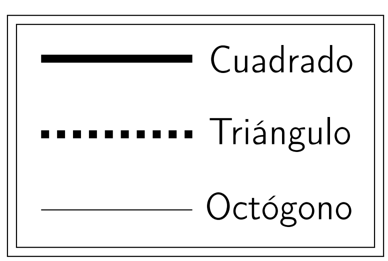
Se deduce que: $a_6 + a_7 + a_8 = 104 - 80 = 24$

17. Esta es una de las posibles soluciones:



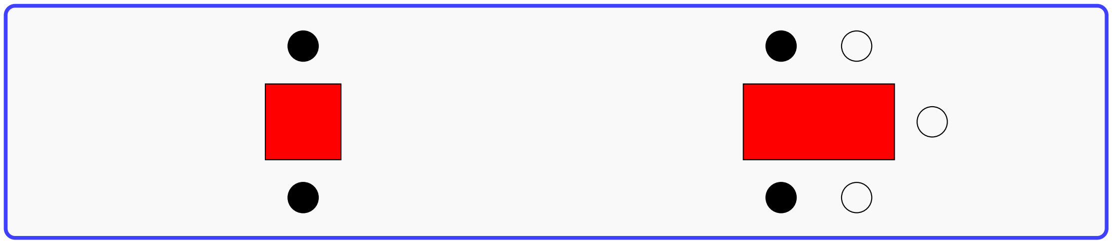
GEOPLANO DE 36 "CLAVOS"

Código de los polígonos:



18. Método 1:

Considérese una distribución de mesas y puestos como los de la imagen:



a) Hay 120 personas sentadas en las posiciones señaladas por ● pues $60 \times 2 = 120$.

b) Hay 42 personas sentadas en las posiciones señaladas por ○ pues $162 - 120 = 42$.

c) Luego, como $42 \div 3 = 14$, entonces hay 14 mesas de 5 puestos, y por tanto $60 - 14 = 46$ mesas de 2 puestos.

Respuesta: Hay 14 mesas de 5 puestos y 46 mesas de 2 puestos.

Método 2:

Supongamos que existe un número impar de mesas de 5 puestos, luego, también debe haber un número impar de mesas de 2 puestos, pues 60 (suma total) es par. En este caso, la cantidad de personas que se pueden sentar en las mesas de 5 puestos es impar, pues impar por impar siempre es impar, mientras que la cantidad de personas que se pueden sentar en las mesas de dos puestos siempre será par, luego la totalidad de personas sería impar pues la suma de un número par con otro impar siempre será impar, esto contradice que la cantidad de personas sea 162, luego debe existir un número par de mesas de 5 puestos.

Si suponemos que todas las mesas fuesen de 5 puestos, como $162 \div 5 = 32,4$, esto nos indica que la máxima cantidad de mesas de 5 puestos es 32. De donde:

No. Mesas de 5 puestos	No. de personas	No. de mesas de 2 puestos	No. de personas	Total de personas
32	160	28	56	216
30	150	30	60	210
28	140	32	64	204

En este punto, notamos que por cada 2 mesas en que se reduce la cantidad de puestos de 5 mesas, la catidad total de personas se reduce en 6 (esto es evidente, pues si cambio una mesa de 5 puestos por una de solo 2, se pierden 3 puestos cada vez), luego, como $216 - 162 = 54$ y $54 \div 6 = 9$, luego cuando la cantidad de mesas de 5 puestos sea de $32 - (2 \times 9) = 14$ se obtendrá la cantidad deseada.

Comprobación:

No. Mesas de 5 puestos	No. de personas	No. de mesas de 2 puestos	No. de personas	Total de personas
14	70	46	92	162

Respuesta: Hay 14 mesas de 5 puestos y 46 mesas de 2 puestos.

---

19. *a*) El área del cuadrado es $A_{\square} = 20\,cm \times 20\,cm = 400\,cm^2$

    b) El área del triángulo corresponde a la cuarta parte del área del cuadrado, luego $A_{\triangle} = \dfrac{400\,cm^2}{4} = 100\,cm^2$.

    c) El área del semicírculo es

$$A_{SC} = \frac{\pi \times (10\,cm)^2}{2} = 50\pi\,cm^2 \approx 50 \times 3,14\,cm^2 = 157\,cm^2$$

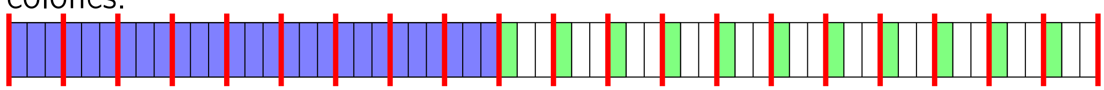
    d) El porcentaje de área pintada corresponde a

$$\begin{aligned}\%\ \text{Pintado} &= \frac{\text{Área pintada}}{\text{Área total}} \times 100\,\% \\ &\approx \frac{400 - 100 - 157}{400} \times 100\,\% \\ &= \frac{143}{400} \times 100\,\% \\ &= 35,75\,\%\end{aligned}$$

20. Método 1: Cuando Felipe gasta los $\frac{9}{20}$ de la herencia, le quedan solamente $\frac{11}{20}$ de la misma. Luego gasta $\frac{1}{3}$ de lo que le quedaba, quedándole $\frac{2}{3}$ del resto, es decir, le quedan $\frac{2}{3}$ de $\frac{11}{20}$ de los 8 millones, luego a Felipe le quedan:

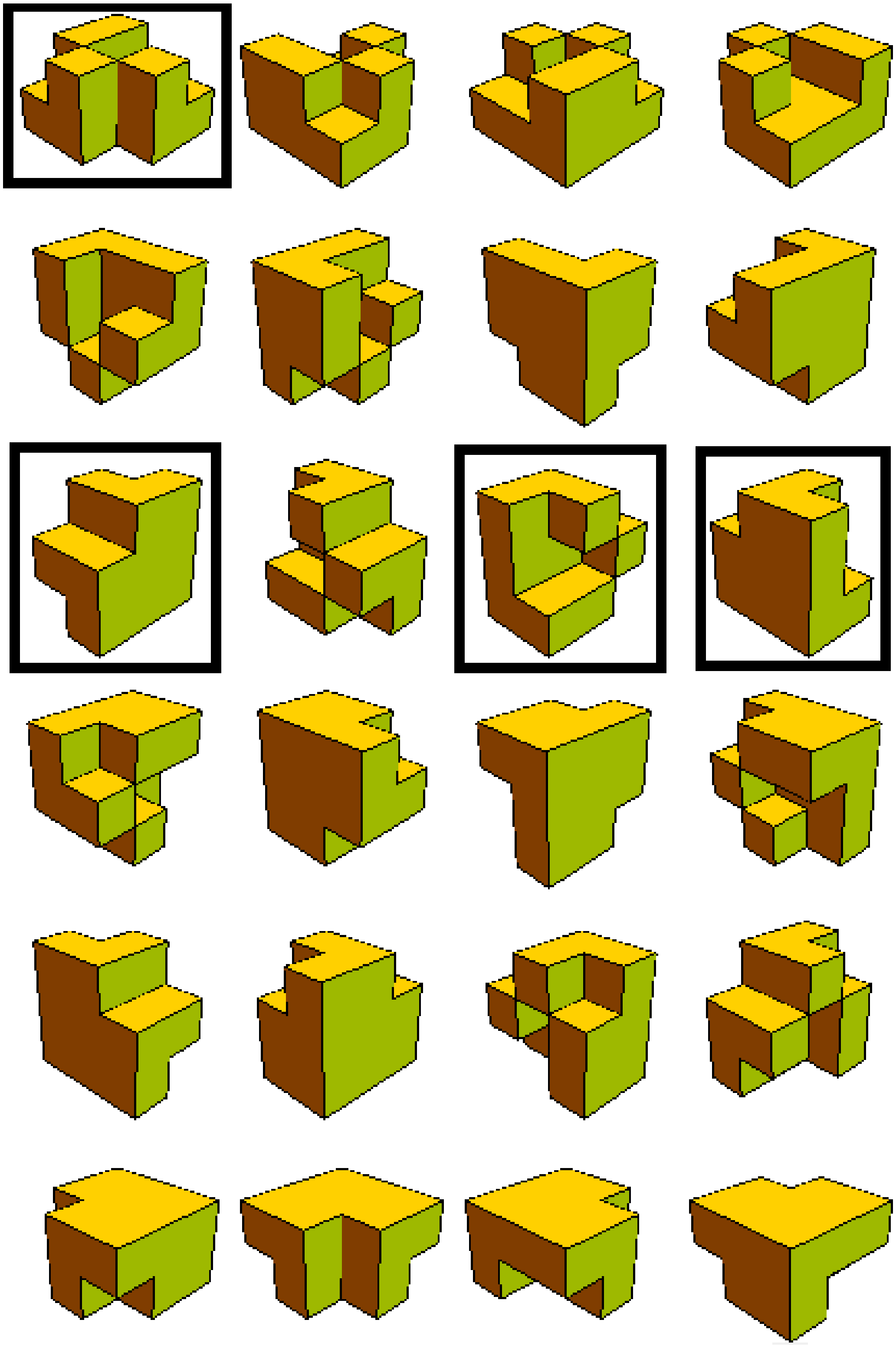
$$\frac{2}{3} \times \frac{11}{20} \times 8\,000\,000 = \frac{176\,000\,000}{60} = \frac{17\,600\,000}{6} = 2\,933\,333,\overline{3}$$

Método 2: Como se habla en el problema de veinteavos y tercios, usemos una barra dividida en 60 partes (pues $20 \times 3 = 60$) para representar los 8 millones. Primero la partimos en 20 y cada una de estas partes las dividimos en 3. Cada rectángulo pequeño vale $\frac{8}{60}$ millones, o en forma simplificada $\frac{2}{15}$ millones. La parte azul corresponde a los $\frac{9}{20}$ que gasta para pago de la deuda, mientras que la parte verde representa el dinero que entrega al hermano. Luego, le queda la parte blanca, es decir 22 partes de $\frac{2}{15}$ millones cada una, así le quedan $\frac{44}{15}$ millones o $2\,933\,333,\overline{3}$ colones.

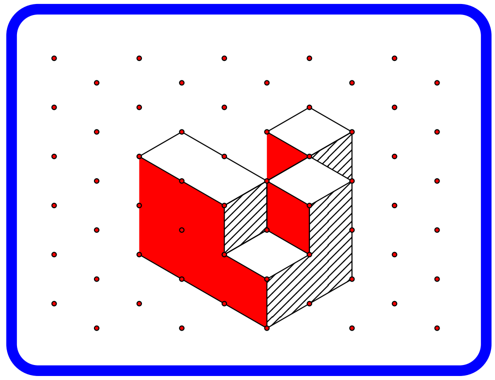


Respuesta: A Felipe le quedan $2\,933\,333,33$ colones de la herencia.

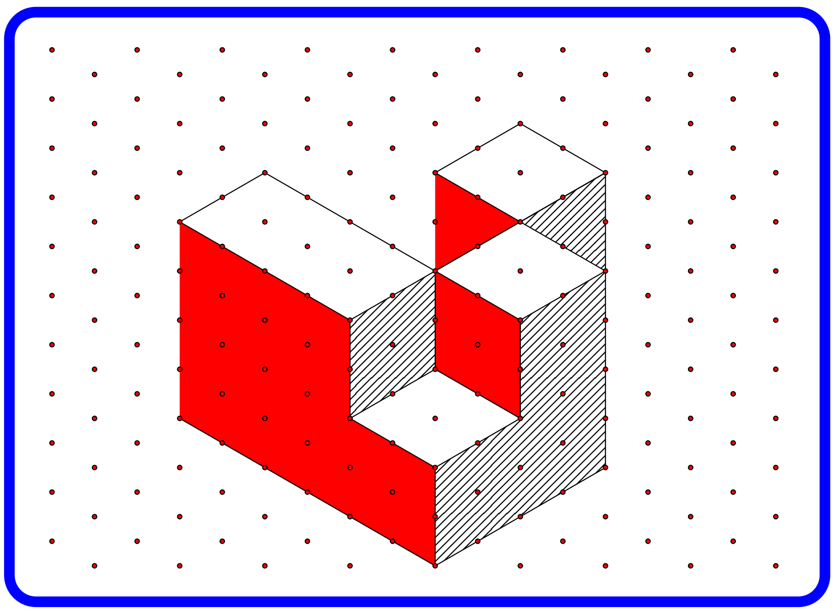
21. Se debe seleccionar una de las siguientes 24 imágenes, excepto las que se hallan en un recuadro pues estas ya han sido proporcionadas, posteriormente se debe realizar la diferenciación de las vistas mediante un tramado, o la coloración.



Solución: Una posible solución es la siguiente:



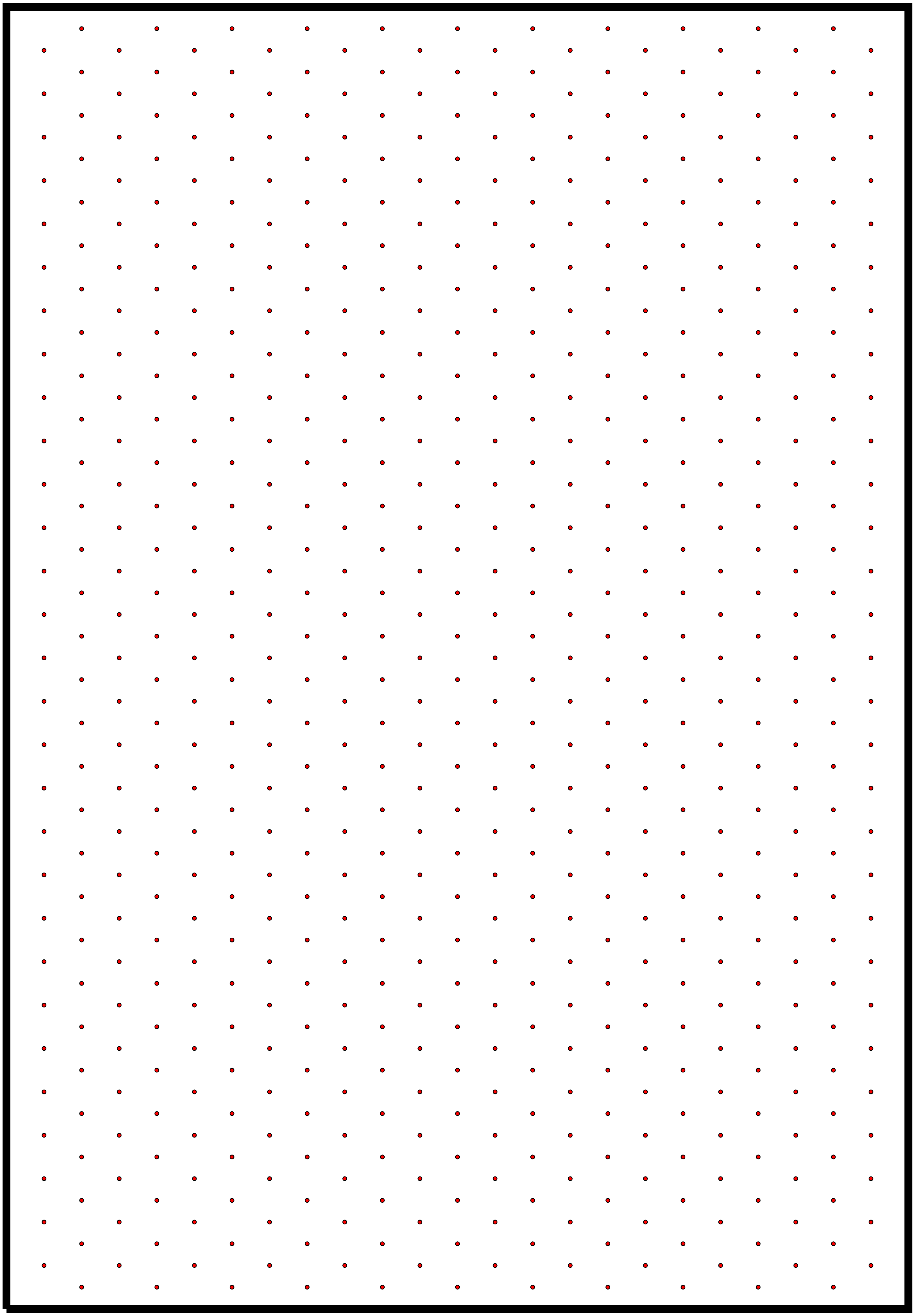
VISTA ISOMÉTRICA EN ESCALA NATURAL

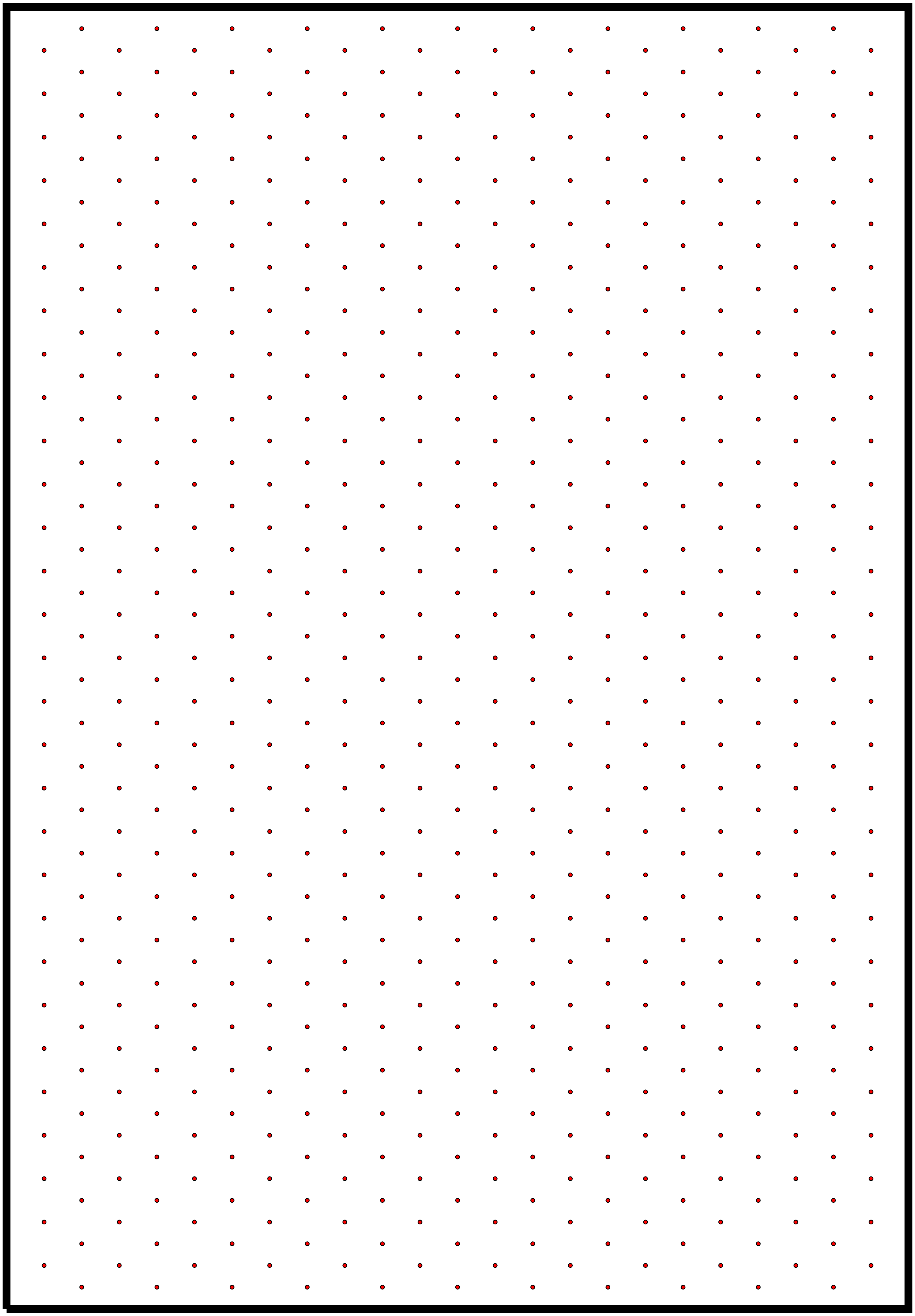


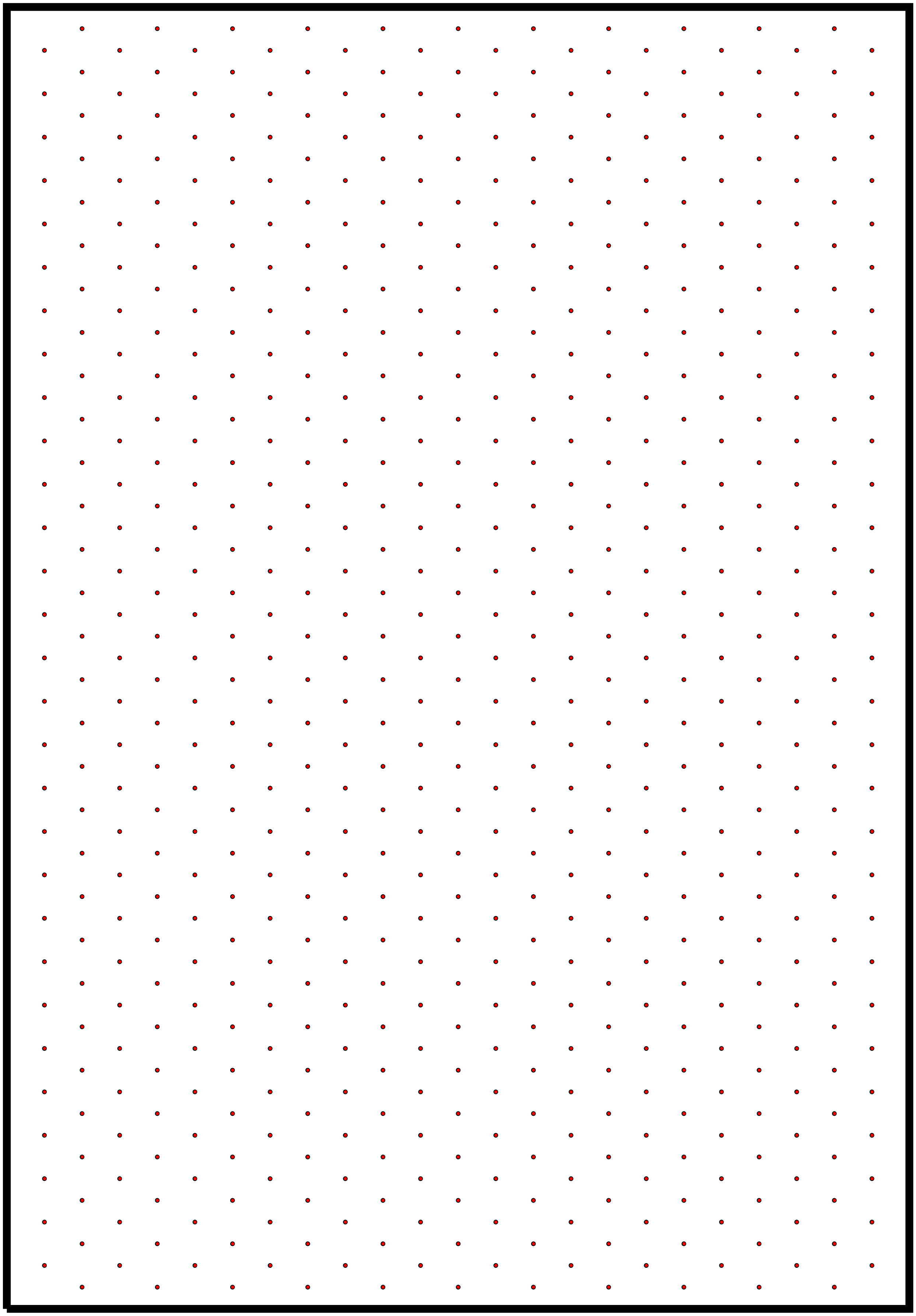
VISTA ISOMÉTRICA EN ESCALA AMPLIADA

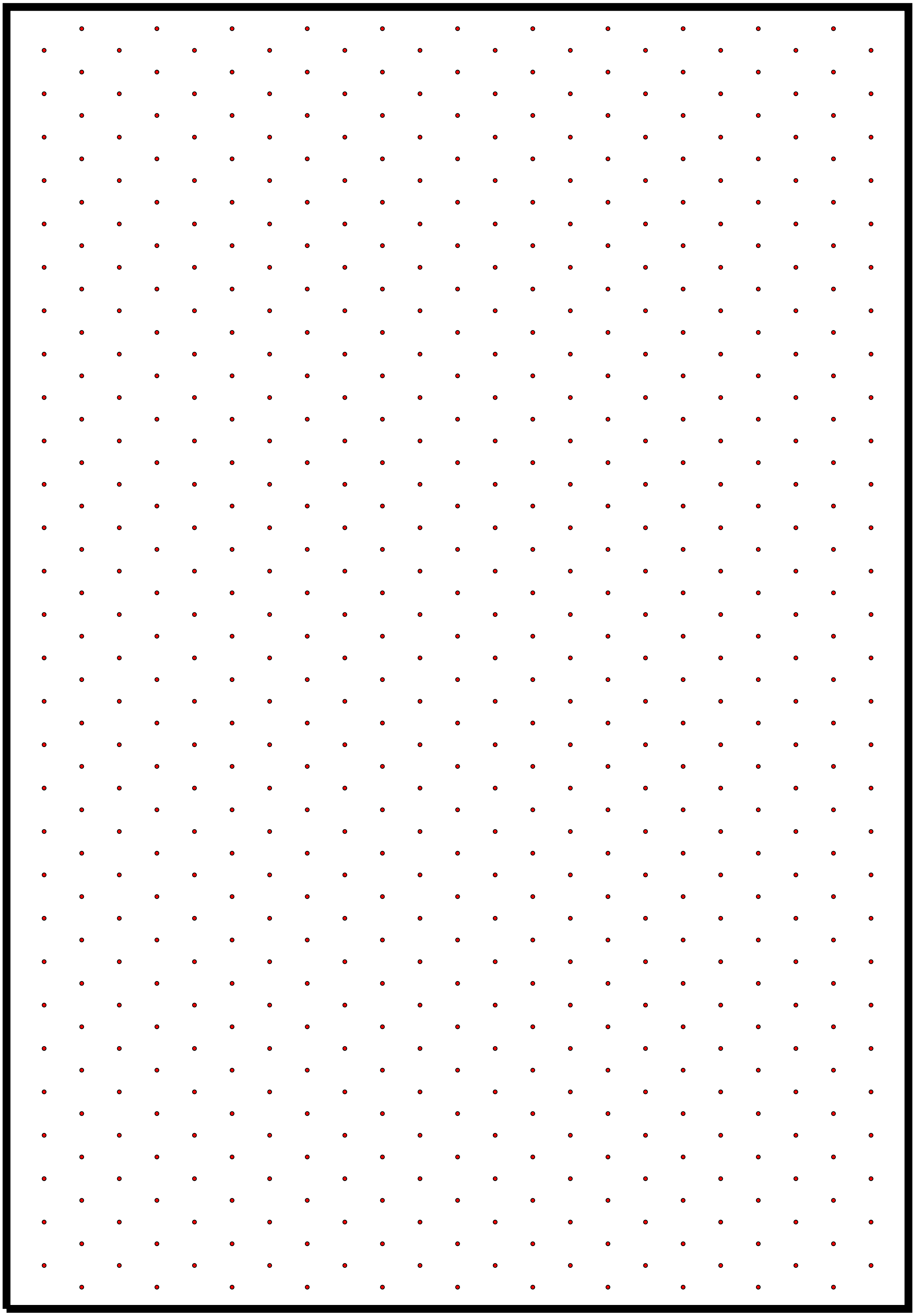
Capítulo 16

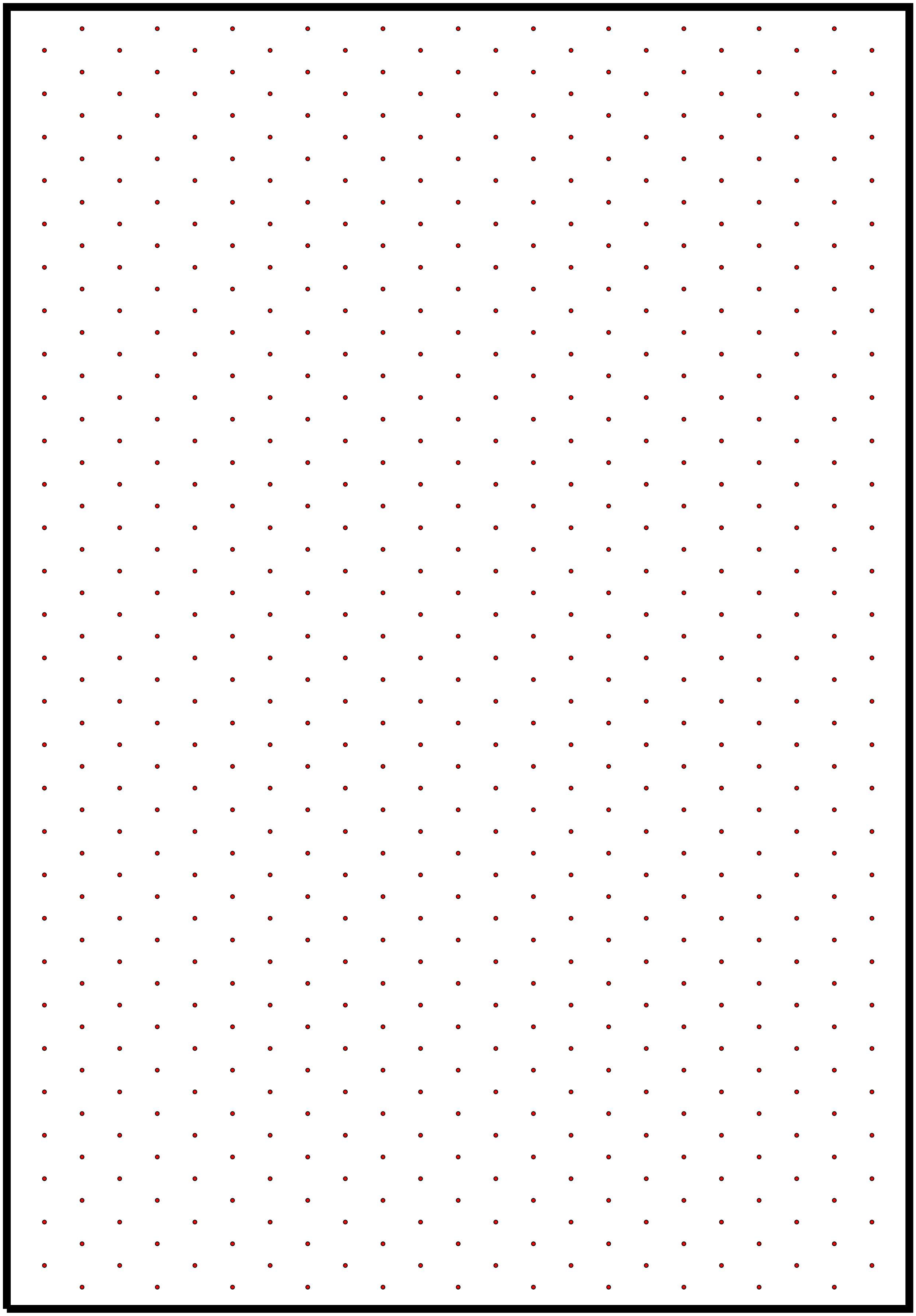
APÉNDICE

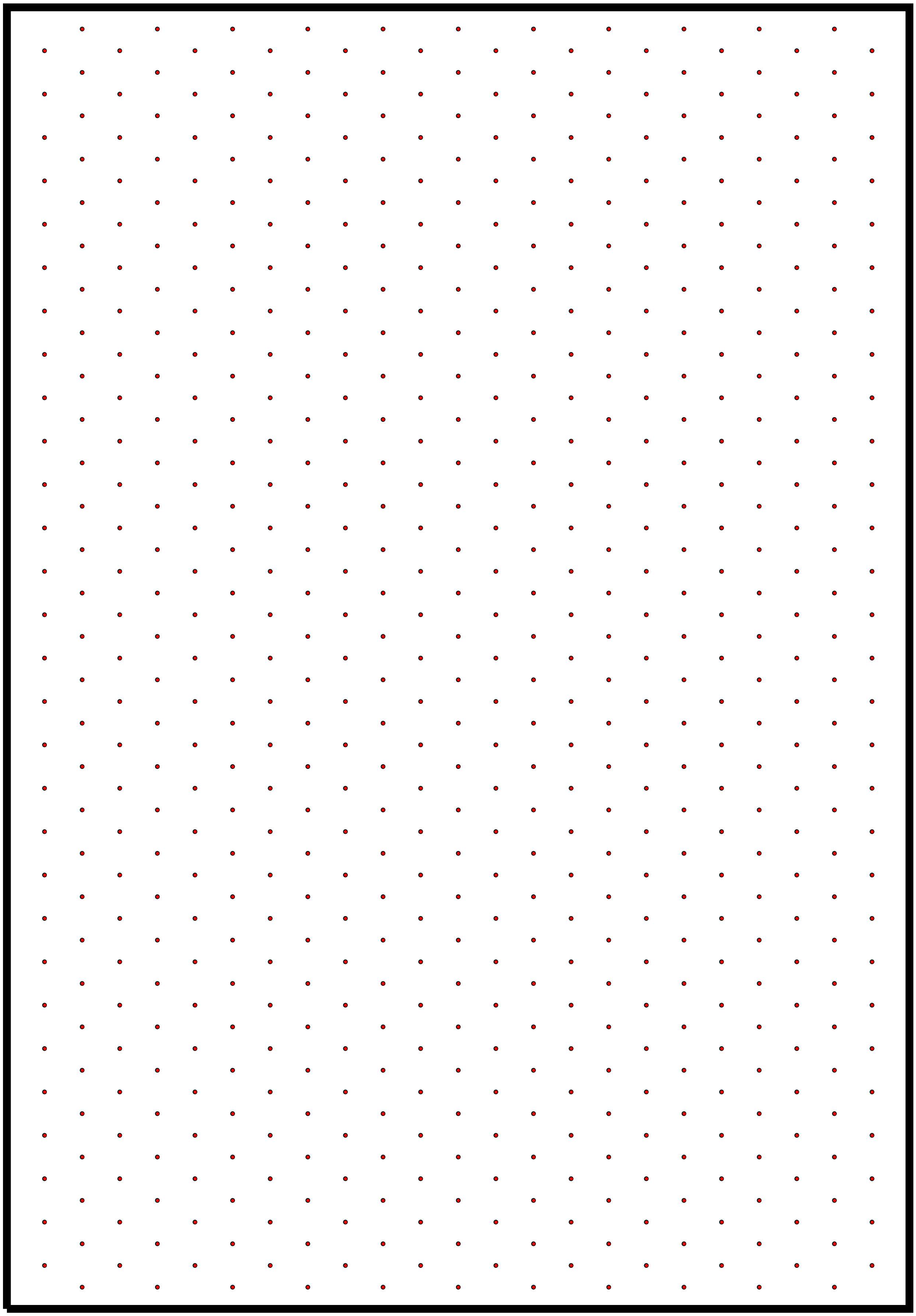


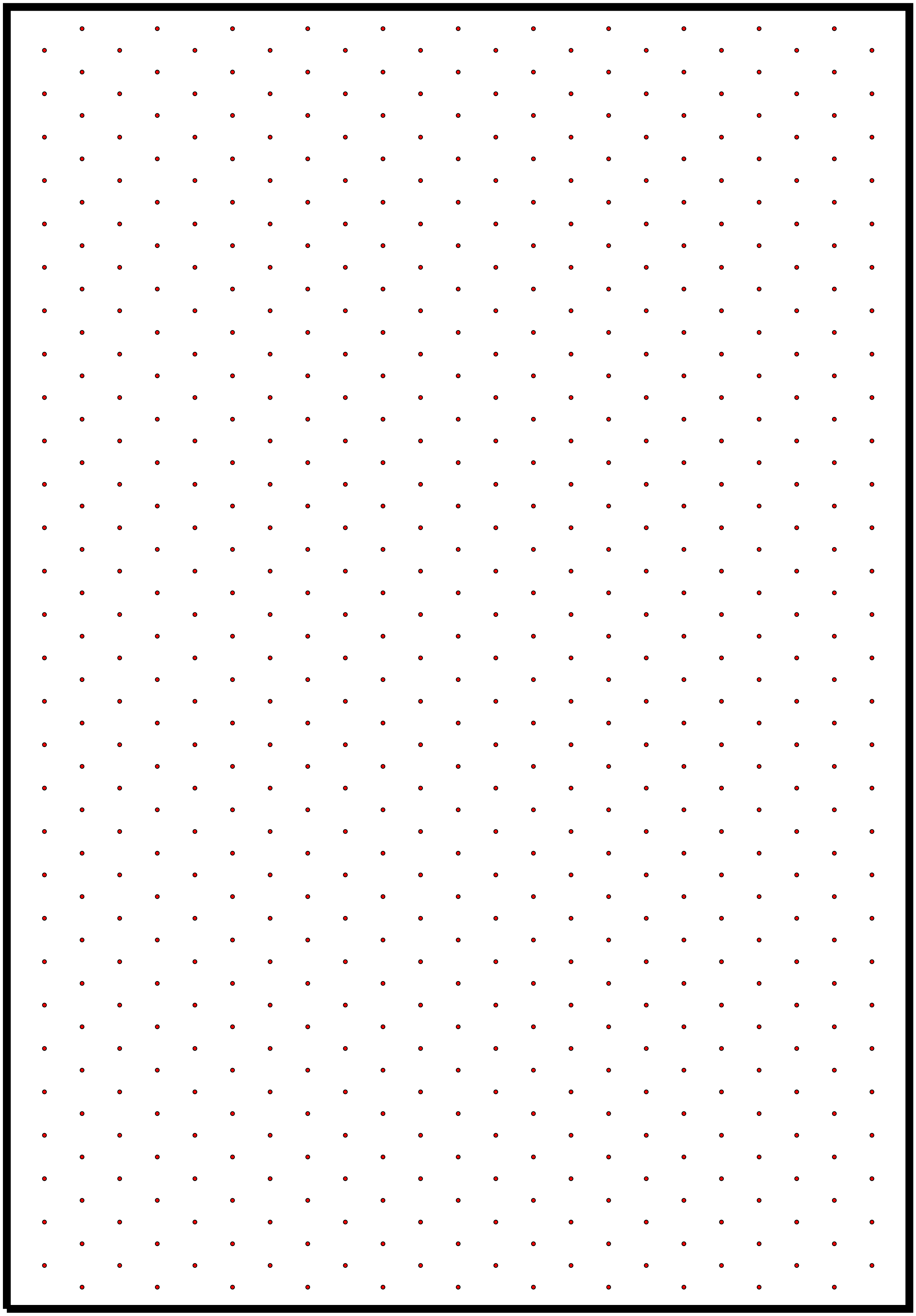


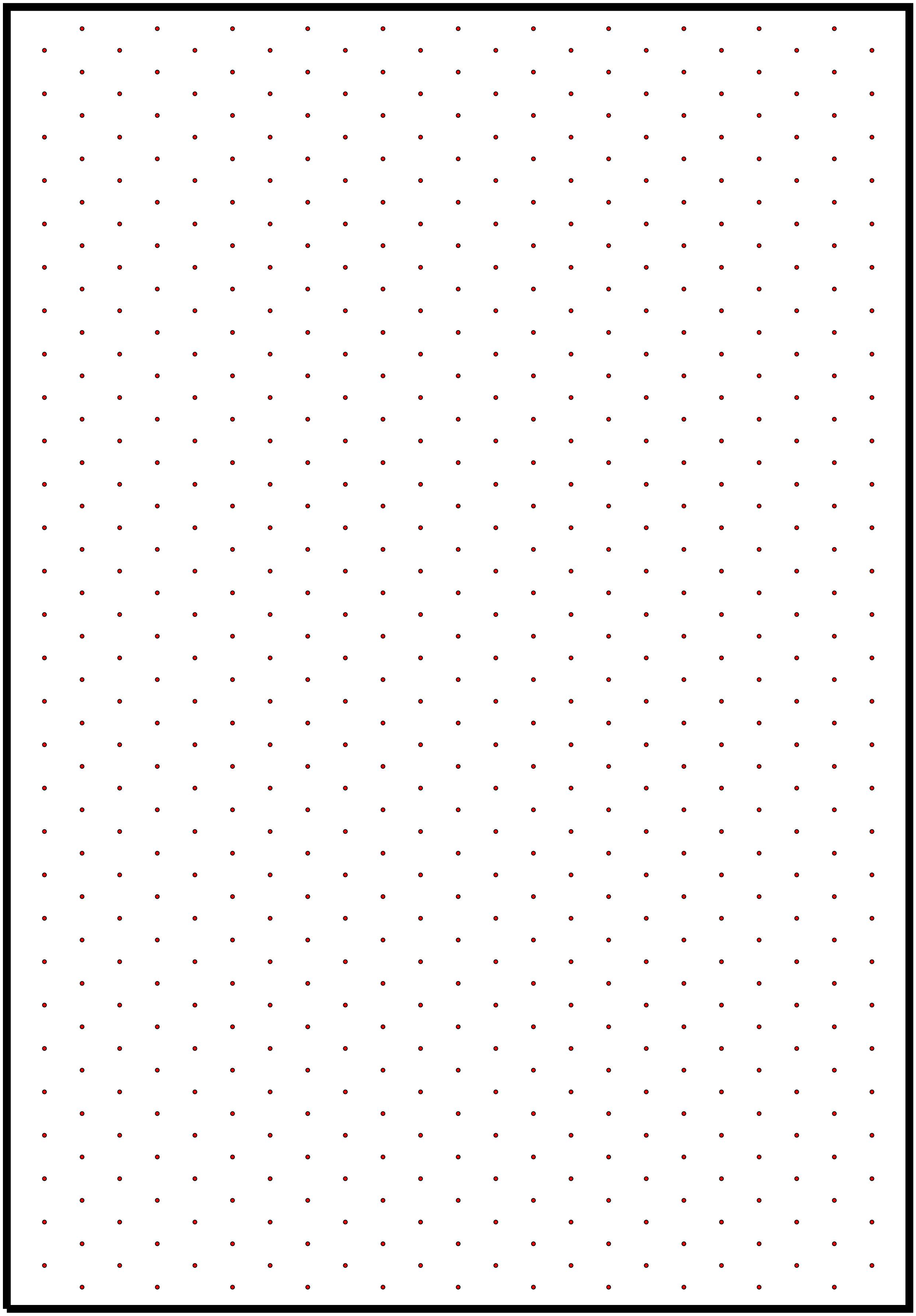


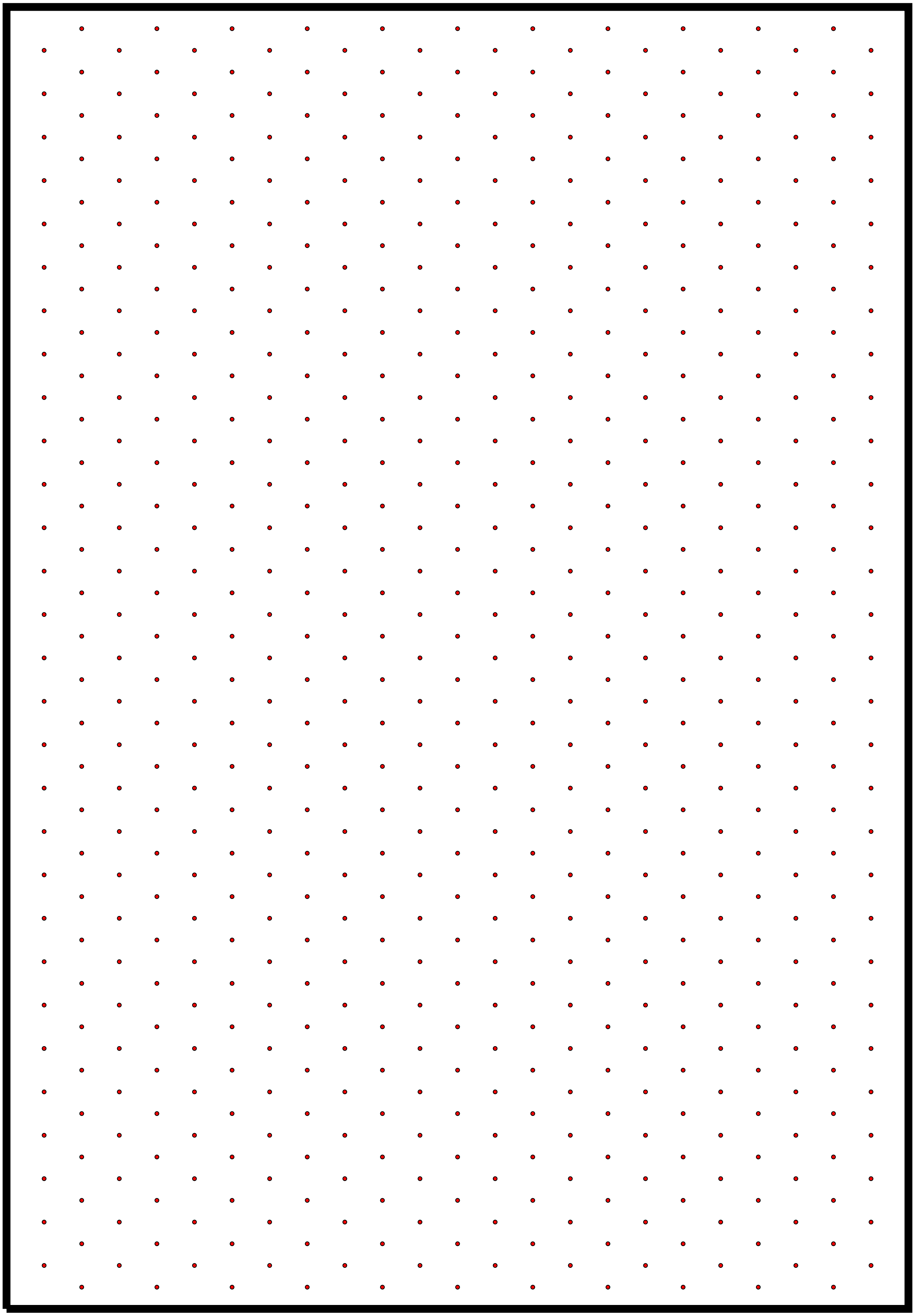


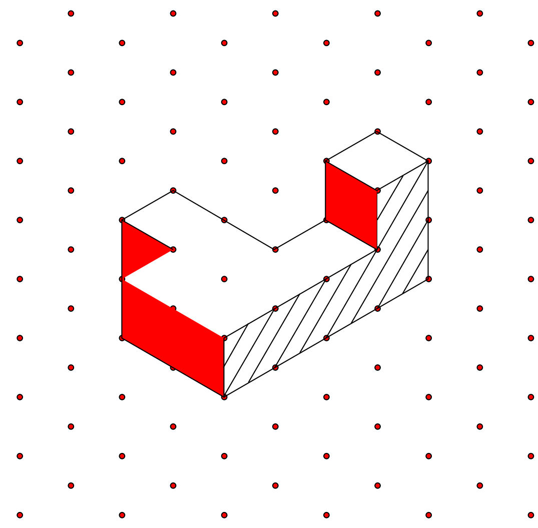












CÁLCULOS:
Volumen= 8

Área de la base= 7

Área lateral= 18

Área total= 32

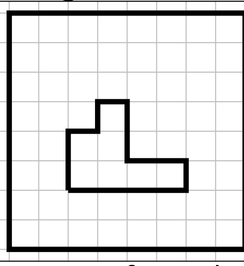
Número de caras= 12

Número de vértices= 20

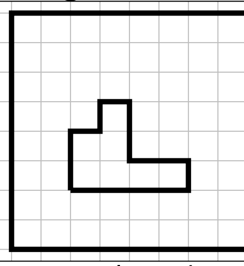
Número de aristas= 30

Suma de números del mapa= 8

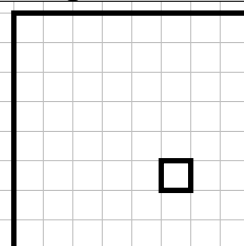
Región nivel 0



Región nivel 1

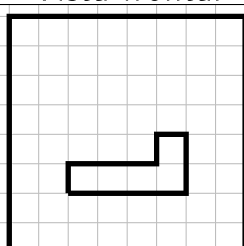


Región nivel 2

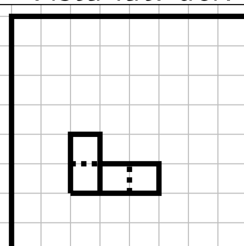


Región nivel 3

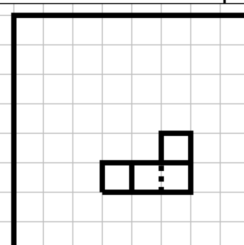
Vista frontal



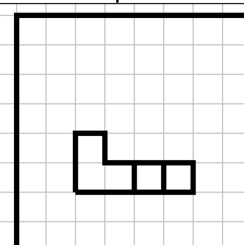
Vista lat. der.



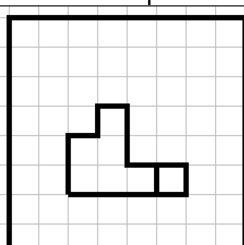
Vista lat. izq



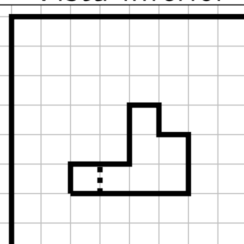
Vista posterior



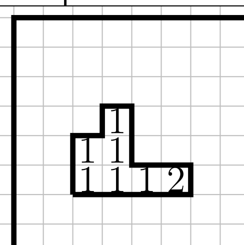
Vista superior



Vista inferior



Mapa del sólido



PROBLEMA:
La figura sólida fue construída usando dos de las piezas del Soma. ¿cuáles son esas piezas?

RESPUESTA:
La figura sólida fue construída usando las piezas 2 y 4.

CÁLCULOS:

Volumen=

Área de la base=

Área lateral=

Área total=

Número de caras=

Número de vértices=

Número de aristas=

Suma de números del mapa=

Región nivel 0	Región nivel 1	Región nivel 2	Región nivel 3
Vista frontal	Vista lat. der.	Vista lat. izq	Vista posterior
Vista superior	Vista inferior	Mapa del sólido	

PROBLEMA:

RESPUESTA:

CÁLCULOS:

Volumen=

Área de la base=

Área lateral=

Área total=

Número de caras=

Número de vértices=

Número de aristas=

Suma de números del mapa=

Región nivel 0	Región nivel 1	Región nivel 2	Región nivel 3
Vista frontal	Vista lat. der.	Vista lat. izq	Vista posterior
Vista superior	Vista inferior	Mapa del sólido	

PROBLEMA:

RESPUESTA:

CÁLCULOS:

Volumen=

Área de la base=

Área lateral=

Área total=

Número de caras=

Número de vértices=

Número de aristas=

Suma de números del mapa=

Región nivel 0

Región nivel 1

Región nivel 2

Región nivel 3

Vista frontal

Vista lat. der.

Vista lat. izq

Vista posterior

Vista superior

Vista inferior

Mapa del sólido

PROBLEMA:

RESPUESTA:

CÁLCULOS:

Volumen=

Área de la base=

Área lateral=

Área total=

Número de caras=

Número de vértices=

Número de aristas=

Suma de números del mapa=

Región nivel 0	Región nivel 1	Región nivel 2	Región nivel 3
Vista frontal	Vista lat. der.	Vista lat. izq	Vista posterior
Vista superior	Vista inferior	Mapa del sólido	

PROBLEMA:

RESPUESTA:

CÁLCULOS:

Volumen=

Área de la base=

Área lateral=

Área total=

Número de caras=

Número de vértices=

Número de aristas=

Suma de números del mapa=

Región nivel 0	Región nivel 1	Región nivel 2	Región nivel 3
Vista frontal	Vista lat. der.	Vista lat. izq	Vista posterior
Vista superior	Vista inferior	Mapa del sólido	

PROBLEMA:

RESPUESTA:

CÁLCULOS:

Volumen=

Área de la base=

Área lateral=

Área total=

Número de caras=

Número de vértices=

Número de aristas=

Suma de números del mapa=

Región nivel 0	Región nivel 1	Región nivel 2	Región nivel 3
Vista frontal	Vista lat. der.	Vista lat. izq	Vista posterior
Vista superior	Vista inferior	Mapa del sólido	

PROBLEMA:

RESPUESTA:

CÁLCULOS:

Volumen=

Área de la base=

Área lateral=

Área total=

Número de caras=

Número de vértices=

Número de aristas=

Suma de números del mapa=

Región nivel 0

Región nivel 1

Región nivel 2

Región nivel 3

Vista frontal

Vista lat. der.

Vista lat. izq

Vista posterior

Vista superior

Vista inferior

Mapa del sólido

PROBLEMA:

RESPUESTA:

CÁLCULOS:

Volumen=

Área de la base=

Área lateral=

Área total=

Número de caras=

Número de vértices=

Número de aristas=

Suma de números del mapa=

Región nivel 0	Región nivel 1	Región nivel 2	Región nivel 3
Vista frontal	Vista lat. der.	Vista lat. izq	Vista posterior
Vista superior	Vista inferior	Mapa del sólido	

PROBLEMA:

RESPUESTA:

CÁLCULOS:

Volumen=

Área de la base=

Área lateral=

Área total=

Número de caras=

Número de vértices=

Número de aristas=

Suma de números del mapa=

Región nivel 0

Región nivel 1

Región nivel 2

Región nivel 3

Vista frontal

Vista lat. der.

Vista lat. izq

Vista posterior

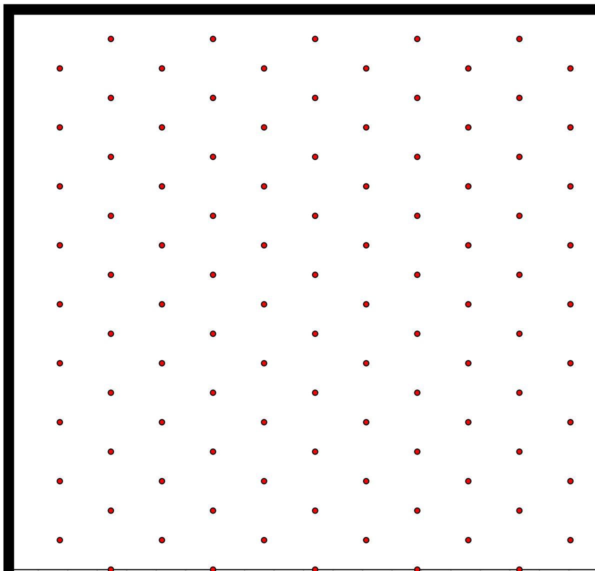
Vista superior

Vista inferior

Mapa del sólido

PROBLEMA:

RESPUESTA:



CÁLCULOS:

Volumen=

Área de la base=

Área lateral=

Área total=

Número de caras=

Número de vértices=

Número de aristas=

Suma de números del mapa=

Región nivel 0	Región nivel 1	Región nivel 2	Región nivel 3
Vista frontal	Vista lat. der.	Vista lat. izq	Vista posterior
Vista superior	Vista inferior	Mapa del sólido	

PROBLEMA:

RESPUESTA:

Bibliografía

[2018] Álvaro Elizondo. *Solucionario de la primera prueba de la Olimpiada Colibrí 2018*. Costa Rica, 2018.

[2018] Álvaro Elizondo. *Solucionario de la segunda prueba de la Olimpiada Colibrí 2018*. Costa Rica, 2018.

[2018] Álvaro Elizondo. *Solucionario de la final de la Olimpiada Colibrí 2018*. Costa Rica, 2018.

[2019] Álvaro Elizondo. *Solucionario de la primera prueba de la Olimpiada Colibrí 2019*. Costa Rica, 2019.

[2019] Álvaro Elizondo. *Solucionario de la segunda prueba de la Olimpiada Colibrí 2019*. Costa Rica, 2019.

[2019] Álvaro Elizondo. *Solucionario de la final de la Olimpiada Colibrí 2019*. Costa Rica, 2019.