OLIMPIADA MATEMÁTICA COLIBRÍ

⋆ FINAL NACIONAL 2023 ⋆

NOTA: En las preguntas de la final de la Olimpiada Matemática Colibrí debe explicar todos los pasos de la resolución que usted da a los problemas propuestos. Una respuesta correcta que no venga acompañada de los procesos matemáticos que muestren la resolución del ejercicio, así como un dibujo hecho sin regla, obtendrá cero puntos.

Problema 1 [10 puntos]

Un ladrón robó un saco de naranjas. Durante la huida, al saltar un muro perdió la mitad de las naranjas más media naranja. Siguió su fuga y el ladrón se vio perseguido por un perro policía, por lo que abandonó la mitad de las naranjas que le quedaban menos media naranja. Posteriormente debido a su mala suerte, tropezó con un montículo de arena que había en la acera, lo que ocasionó que se le cayera la mitad de las naranjas que le quedaban más media naranja. Si al final le quedaron dos docenas de naranjas, ¿cuántas naranjas contenía originalmente el saco que llevaba el ladrón al inicio de su peripecia?

Posible solución problema 1:

1. Se resuelve el problema de atrás hacia adelante y teniendo como punto de partida que al ladrón le quedaron 24 naranjas de todas las naranjas robadas.

2. En el punto donde el ladrón choca con el montículo de arena, él debería tener aproximadamente el doble de 24, o sea 48 naranjas.

3. Pero en este lugar de la huída no solo esa consideración se debe tener en cuenta ya que con 48 naranjas no da la cantidad con que quedó el ladrón, pues hubiera perdido 24 naranjas y media, y le quedarían 23 y media. Pero si le agregamos una naranja más a las 48 que tenía al multiplicar $24 \times 2 + 1 = 49$, con este nuevo cálculo sí funciona, ya que entonces perdió 24 naranjas y media, más media naranja nos da 25 naranjas, y le quedaron 24, que es el número de naranjas buscado.

4. Como el punto anterior, en el episodio del perro debería tener aproximadamente $49 \times 2 = 98$ naranjas, pero $98 - 48,5 = 49,5$. Este cálculo no nos da un número natural y tampoco las 49 naranjas con que debería quedar. Por lo tanto, debemos restar una naranja al doble de 49, haciendo el siguiente cálculo: $49 \times 2 - 1 = 97$. Entonces, antes del episodio del perro, el ladrón debía llevar en el saco 97 naranjas.

5. En el momento de brincar el muro, por un análisis igual al realizado en el punto 3, el ladrón al iniciar su fuga debía tener $97 \times 2 + 1 = 195$ naranjas. Por lo tanto, el saco contenía originalmente 195 naranjas.

OLIMPIADA MATEMÁTICA COLIBRÍ

⋆ FINAL NACIONAL 2023 ⋆

Problema 2 [10 puntos]

Javier, Blanca y Catalina juegan tenis de mesa con el sistema "el que pierde sale a descansar", es decir que en cada juego participan dos de ellos y el tercero descansa (queda afuera), y en el juego siguiente el ganador se enfrenta al que descansó, mientras el perdedor descansa, y así sucesivamente. Cuando terminan de jugar se sabe con certeza que Blanca participó en 14 juegos, Javier participó en 12 juegos y Catalina participó en 8 juegos. ¿Quién perdió el sexto juego?

Posible solución problema 2:

1. Se conoce que Blanca jugó 14 veces, Javier 12 y Catalina 8 por lo que serían un total de 34 encuentros.

2. Debemos tomar en cuenta que en cada partido participan dos jugadores diferentes y esto hace entonces que en total hubo 17 juegos o partidos ya que $34 \div 2 = 17$.

3. Si tomamos en cuenta ahora lo siguiente:

   a) Alguien que haya jugado en el primer juego, si pierde todos los juegos entonces debe descansar en el 2, juega en el 3, descansa en el 4, juega en el 5 y así sucesivamente, es decir que participa en los juegos 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 y 17, para un total de 9 juegos. Pero no hay nadie en esa condición. Y si ganara algunos juegos, el número de participaciones aumenta, como se ve en el caso de Blanca y Javier.

   b) Si consideramos que Catalina no participó en el juego 1 debido a que es la que tiene menos juegos a su haber, y teniendo en cuenta que debe completar 8 juegos, se podría asumir que debe haber participado en los juegos 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 y 16. Estaría perdiendo en todos los casos, ya que si hubiera ganado alguno su número de participaciones habría sido al menos 9.

   c) Por lo tanto, como conclusión de lo anterior la que perdió el sexto juego, y todos los demás juegos pares fue Catalina.

OLIMPIADA MATEMÁTICA COLIBRÍ

⋆ FINAL NACIONAL 2023 ⋆

Problema 3 **[10 puntos]**

Considerando que el conjunto de los números naturales es el siguiente: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$, responda:

1. ¿Cuántos conjuntos de 3 números naturales distintos hay de manera que la suma de sus elementos sea 15?
2. ¿Cuáles son esos conjuntos?

Posible solución problema 3:

La suma de los números que debemos considerar debe ser 15, esto implica que los números naturales que se deben tomar en cuenta para formar los conjuntos deben ser los siguientes: $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14\}$

A partir de esta lista de números a considerar, se van construyendo los conjuntos de 3 números que suman 15, de forma ordenada para evitar repetir conjuntos, manteniendo el primer número, aumentando uno a uno el segundo número y disminuyendo de la misma forma el tercer número, hasta alcanzar todas las combinaciones con ese primer número fijo. Luego, se aumenta en uno el primer número y se hace el mismo proceso con los otros dos números. Y así sucesivamente. De esta forma se obtienen los siguientes conjuntos:

1. $\{0,1,14\}$
2. $\{0,2,13\}$
3. $\{0,3,12\}$
4. $\{0,4,11\}$
5. $\{0,5,10\}$
6. $\{0,6,9\}$
7. $\{0,7,8\}$
8. $\{1,2,12\}$
9. $\{1,3,11\}$
10. $\{1,4,10\}$
11. $\{1,5,9\}$
12. $\{1,6,8\}$
13. $\{2,3,10\}$
14. $\{2,4,9\}$
15. $\{2,5,8\}$
16. $\{2,6,7\}$
17. $\{3,4,8\}$
18. $\{3,5,7\}$
19. $\{4,5,6\}$

Con la lista anterior se responde la segunda pregunta.

Y con base en esta lista, hay un total de 19 conjuntos de 3 números naturales que suman 15.

Problema 4 [10 puntos]

Utilice su geoplano para construir los tres polígonos que usted llamará V, A y N. Escriba su respuesta con el uso de los siguientes tres tipos de líneas: gruesa , discontinua y continua . Usted decide qué tipo de línea le asigna a cada uno de los polígonos. Un dibujo sin el código indicado para distinguir los polígonos tendrá cero puntos. Considere las siguientes características que distinguen los polígonos mencionados anteriormente.

Polígono V:

1. Es un hexágono irregular.
2. Tiene exactamente un lado vertical y otro horizontal.
3. Su área es $7,5\ u^2$.
4. Posee 5 puntos en común con el polígono N y 3 con el polígono A.
5. Uno de sus vértices pertenece a un lado del polígono N.

Polígono A:

1. Es un pentágono irregular.
2. Tiene dos lados horizontales, dos oblicuos y uno vertical.
3. Su área es de $2\ u^2$.
4. Parte de su interior se encuentra en el interior de los polígonos V y N.
5. Tiene un vértice en común con el polígono V y uno de sus vértices es el clavo superior derecho.

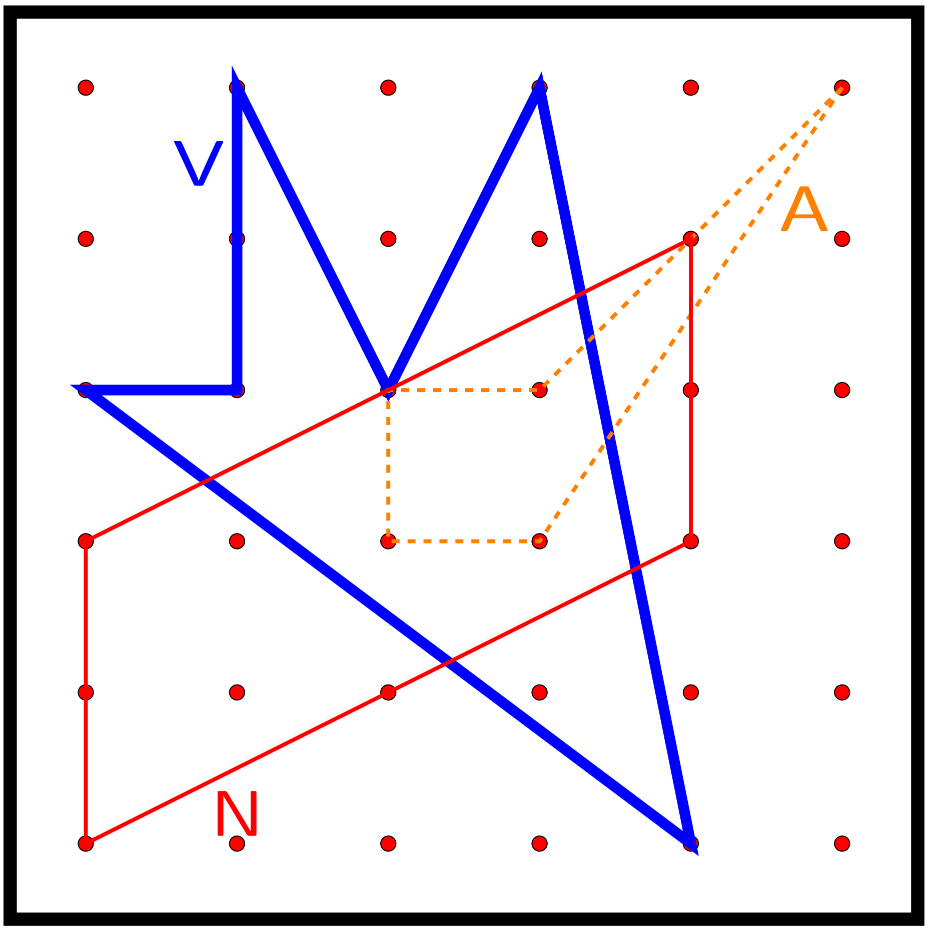
Polígono N:

1. Es un cuadrilátero paralelogramo.
2. Tiene un vértice en uno de los lados oblicuos del polígono A.
3. Su área es de $8\ u^2$.
4. Tiene dos lados verticales y dos oblicuos.
5. Tiene tres puntos en común con el polígono A.

OLIMPIADA MATEMÁTICA COLIBRÍ

⋆ FINAL NACIONAL 2023 ⋆

Posible solución problema 4:



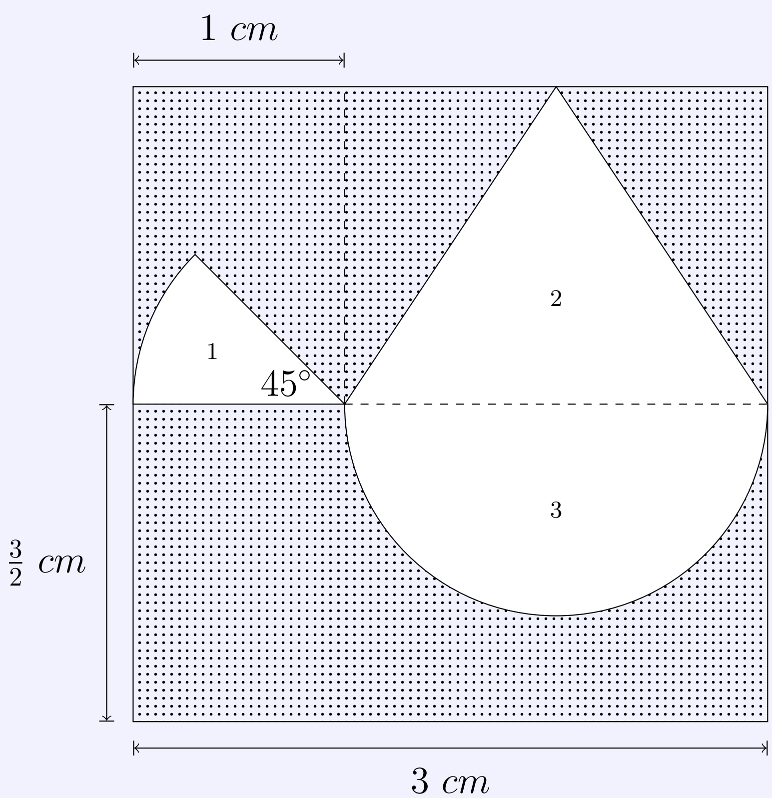
Se asignan 10 puntos si cumple 15 condiciones y se rebaja un punto por cada condición que no cumple. Si cumple 5 condiciones o menos, obtiene 0 puntos.

OLIMPIADA MATEMÁTICA COLIBRÍ

⋆ FINAL NACIONAL 2023 ⋆

Problema 5 [10 puntos]

De acuerdo con la siguiente figura:



Calcule el área no sombreada, teniendo en cuenta que las figuras no sombreadas están en un cuadrado. Use $\pi = 3,14$.

Posible solución problema 5:

1. Numeramos las áreas como se ve en la figura (se podría hacer de otras formas).

2. Cálculo de área uno.

   En la figura se indica un ángulo de $45°$ por lo tanto esa área representa la octava parte del círculo. El radio del círculo mide $1\ cm$. Entonces el área se calcula:

   $A_1 = \pi \times r^2 \div 8$

   $A_1 = 3,14 \times 1^2 \div 8$

   $A_1 = 3,14 \div 8$

   $A_1 = 0,3925\ cm^2$

3. Cálculo de área dos.

   Es un triángulo, su base es $2\ cm$ y su altura es $\frac{3}{2}\ cm$ (la mitad del lado del cuadrado), entonces el área es:

   $A_2 = \frac{b \times h}{2}$

   $A_2 = \frac{2 \times \frac{3}{2}}{2}$

   $A_2 = \frac{3}{2}$

   $A_2 = 1,5\ cm^2$

4. Cálculo de área tres.

   Es un semicírculo cuyo radio es $1\ cm$, entonces el área corresponde a la mitad del área del círculo:

   $A_3 = \pi \times r^2 \div 2$

   $A_3 = 3,14 \times 1^2 \div 2$

   $A_3 = 3,14 \div 2$

   $A_3 = 1,57\ cm^2$

5. Cálculo de área total.

   Para calcular el área total se suman las tres anteriores:

   $A = A_1 + A_2 + A_3$

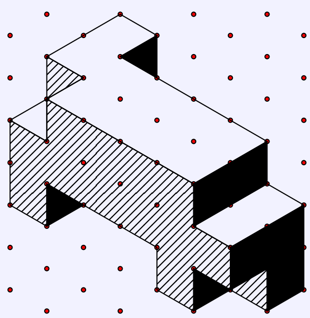
   $A = 0,3925 + 1,5 + 1,57$

   $A = 3,4625\ cm^2$

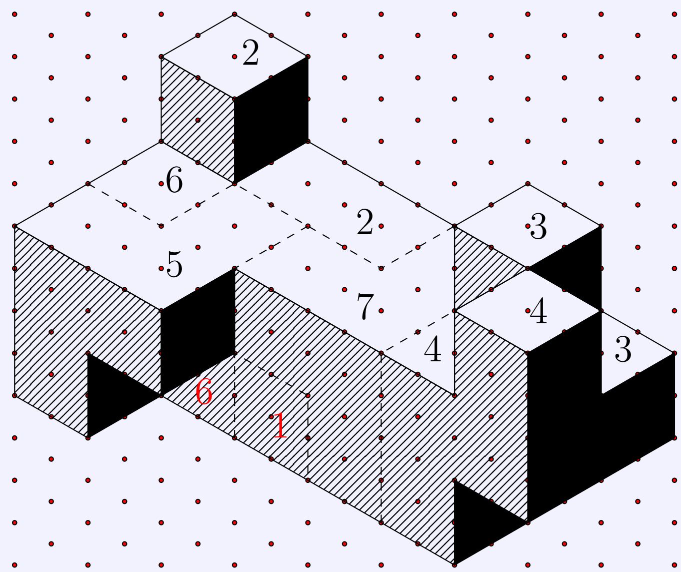
   Por lo tanto, el área no sombreada es $3,4625\ cm^2$

Problema 6 [10 puntos]

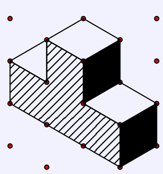
Paula y Mario construyeron un cuerpo sólido empleando todas las piezas del Soma. Se muestran a continuación dos vistas isométricas distintas de este cuerpo, una ampliada y otra sin ampliar. Construya usted este cuerpo sólido usando su soma, y luego en la hoja de puntos, dibuje una vista a escala natural o sin ampliar y esa misma vista dibújela ampliada. No puede usar ninguna de las dos vistas dadas como ejemplos. Debe usar el mismo código de color, superficies blancas, rayadas y negras, como en las figuras que aparecen en esta página, con el mismo patrón dado. Considere los errores señalados. Un punto menos por cada error cometido.



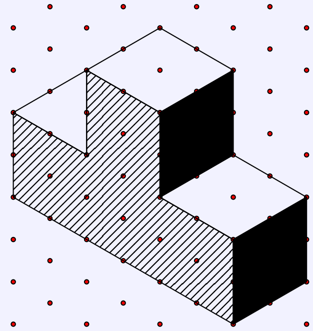
Primera vista, sin ampliar.



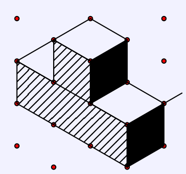
Segunda vista, ampliada. Incluye línea punteada para demarcar piezas del Soma y su correspondiente numeración (usted no debe incluir esto).



Pieza tres sin ampliar y sin errores.



Pieza tres ampliada y sin errores.



Pieza tres sin ampliar y con errores.

Solución problema 6: